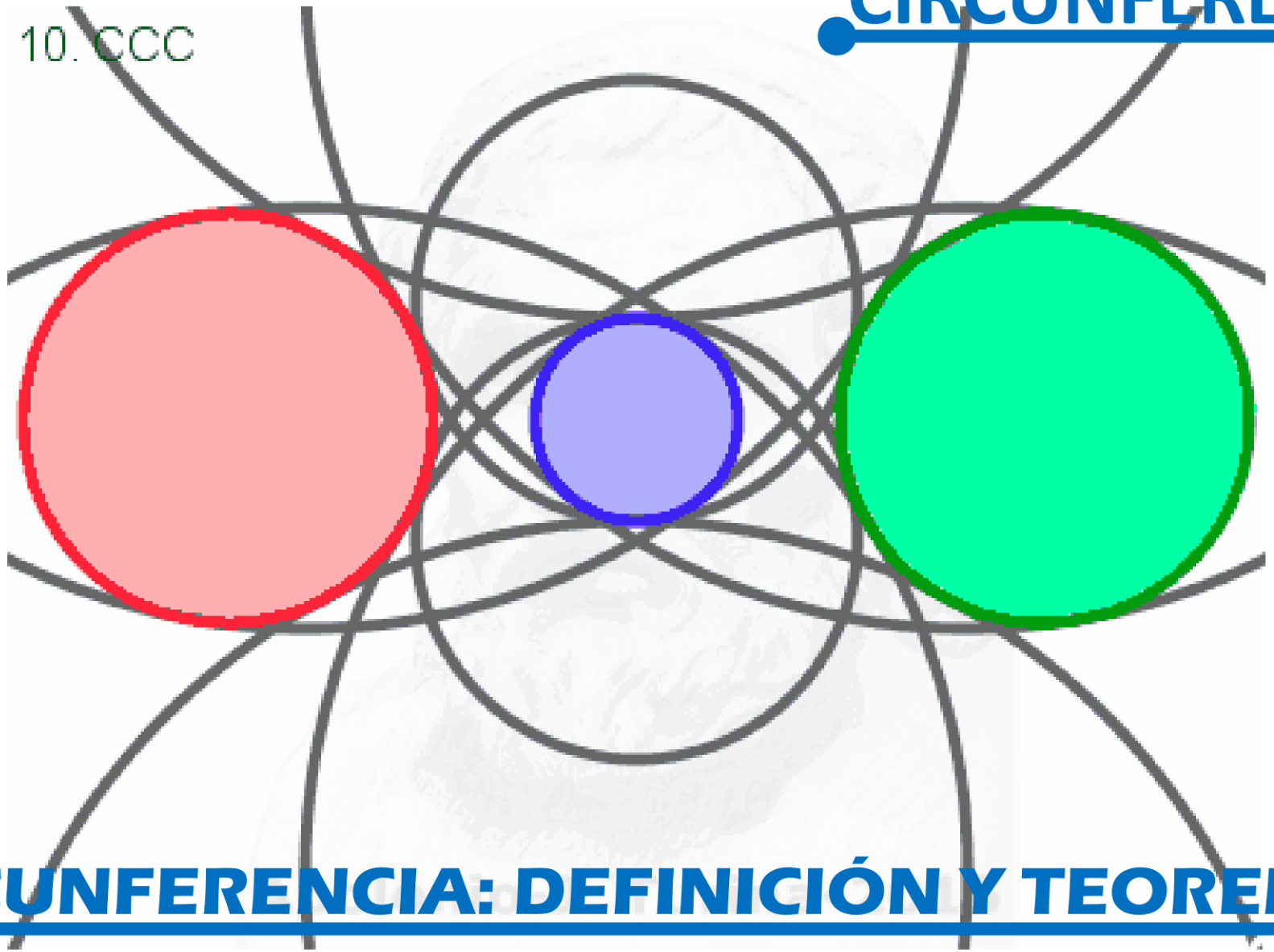
PITAGORAS
ACADEMIA

GEOMETRÍA

Profesor:
Marco Almerco

GEOMETRÍA

CIRCUNFERENCIA



CIRCUNFERENCIA: DEFINICIÓN Y TEOREMAS

PITAGORAS ACADEMIA

TEMA 07: CIRCUNFERENCIA

DEFINICIONES Y ELEMENTOS

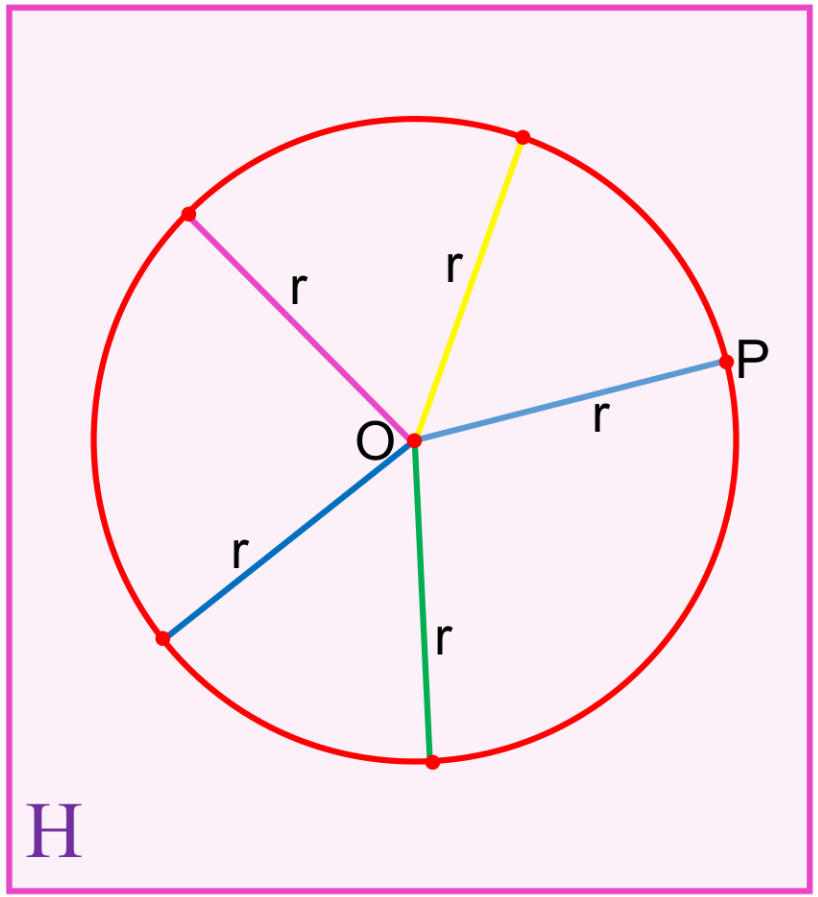
POSICIONES RELATIVAS

TEOREMAS

CIRCUNFERENCIA Y POLÍGONOS

DEFINICIÓN

Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de otro punto fijo de dicho plano llamado CENTRO de la circunferencia.



Elementos:

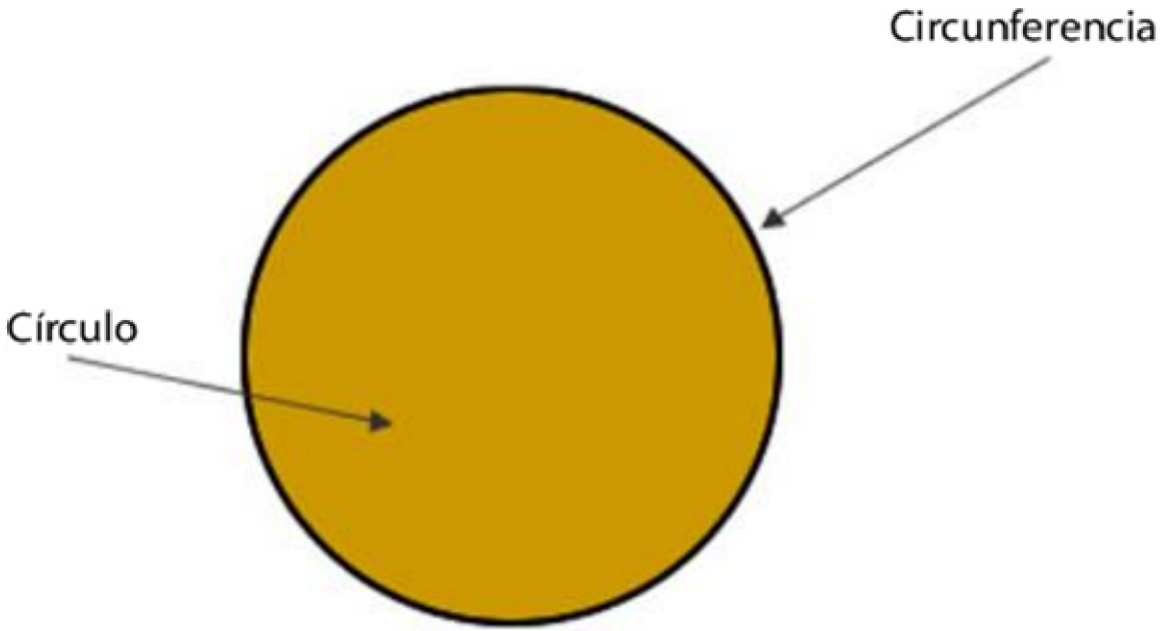
1) Centro: O

2) Radio: $\overline{OP}$

El interior de la circunferencia es el conjunto de puntos del plano cuya distancia al centro es menor que la longitud del radio.

El exterior de la circunferencia es el conjunto de puntos del plano cuya distancia al centro es mayor que la longitud del radio.

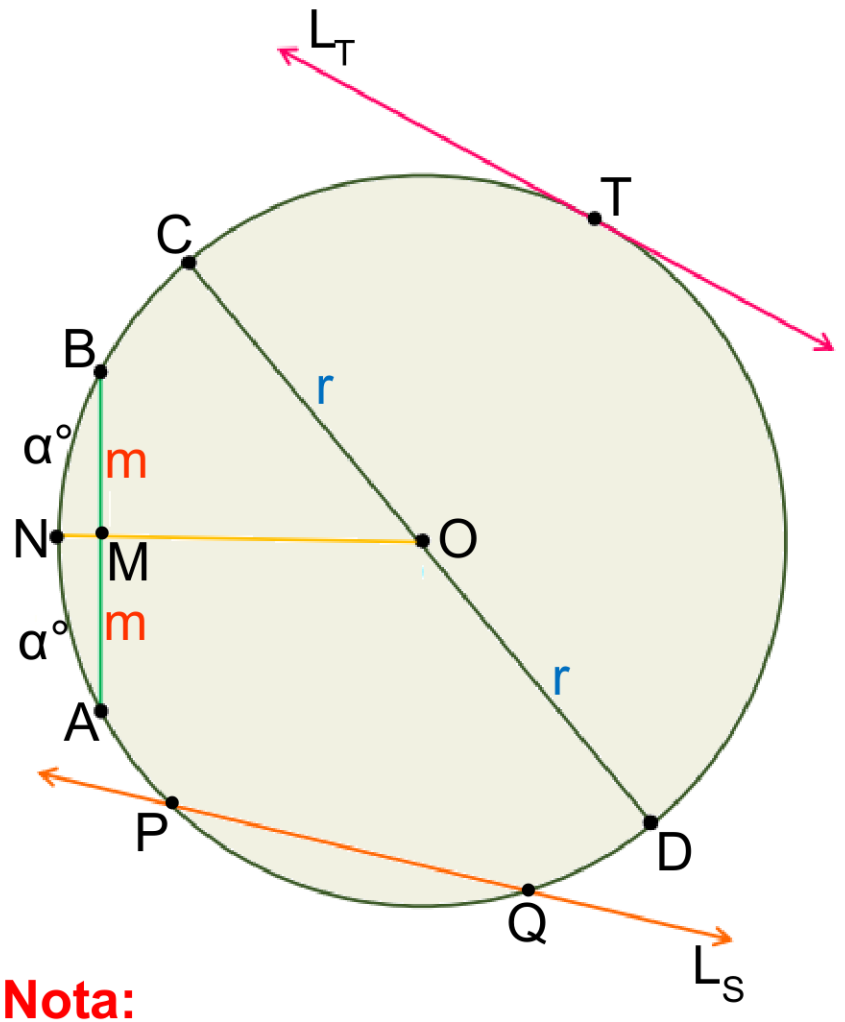
Un círculo es la unión de la circunferencia y su interior.



ELEMENTOS

LÍNEAS ASOCIADAS A LA CIRCUNFERENCIA

- **Cuerda:** Segmento cuyos extremos son dos puntos de la circunferencia. Ejemplo: $\overline{AB}$.
- **Arco:** Porción de circunferencia comprendida entre dos puntos de esta curva. Ejemplo: $\overset{\frown}{AB}$.
- **Flecha:** Porción de radio que une el punto medio de la cuerda con el punto medio del menor arco correspondiente a dicha cuerda. Ejemplo: $\overline{MN}$.
- **Recta Tangente:** Recta coplanar con la circunferencia, que interseca a la circunferencia en un solo punto, dicho punto se denomina punto de tangencia. Ejemplo: $\overleftrightarrow{L_T}$ y "T" es punto de tangencia.
- **Recta Secante:** Recta que contiene a una cuerda de la circunferencia. Ejemplo: $\overleftrightarrow{L_S}$.



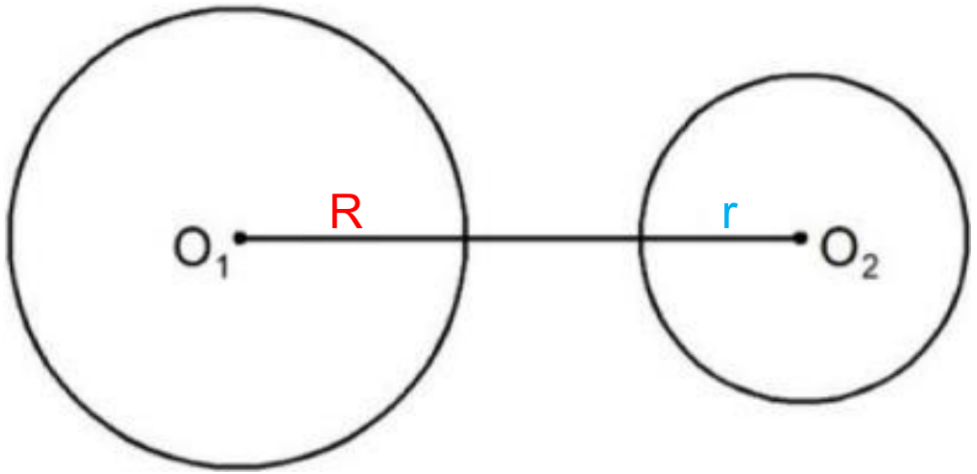
- **Nota:**

Se denomina diámetro a cualquier cuerda que contiene al centro de la circunferencia. Ejemplo: $\overline{CD}$ (CD = 2r).

POSICIONES RELATIVAS

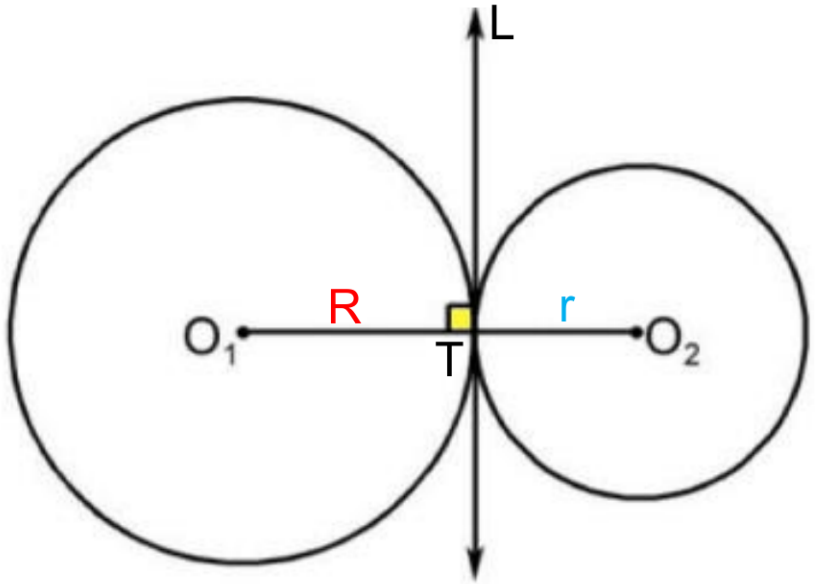
Posiciones relativas entre dos circunferencias coplanarias

01. Circunferencias exteriores: Cuando la distancia que une los centros de las 2 circunferencias es mayor que la suma de las longitudes de los radios.



$$O_1O_2 > R + r$$

02. Circunferencias tangentes exteriores: Cuando la distancia que une los centros de las 2 circunferencias es igual a la suma de las longitudes de los radios.

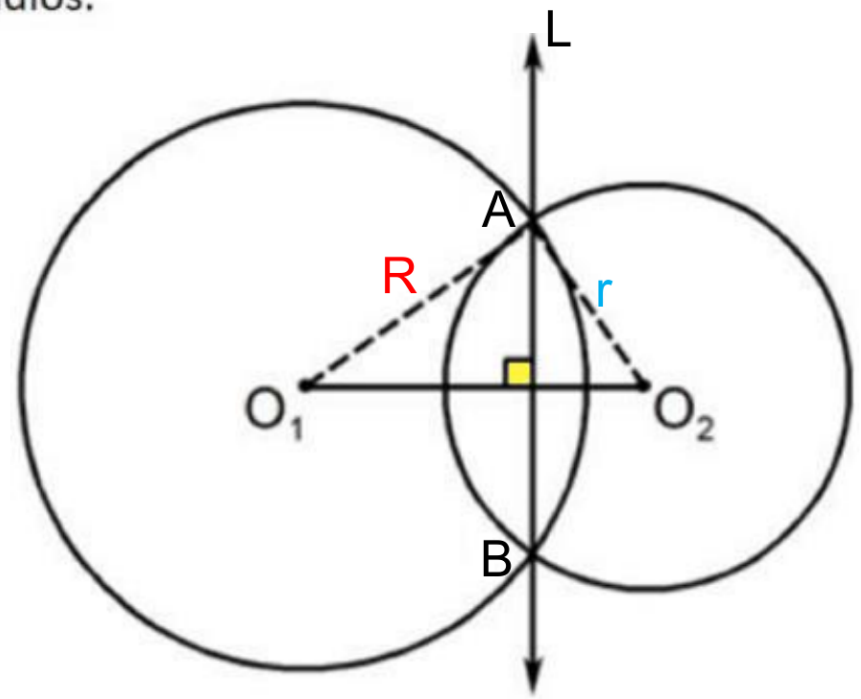


$$O_1O_2 = R + r$$

$\vec{L}$: Tangente común

POSICIONES RELATIVAS

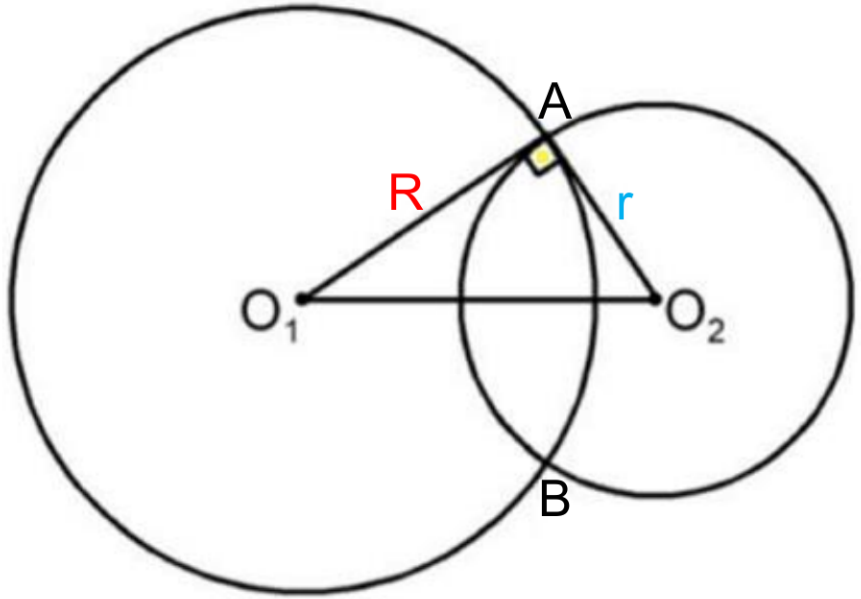
03. Circunferencias secantes: Cuando la distancia que une los centros de las dos circunferencias es menor que la suma y mayor que la diferencia de las longitudes de los radios.



$$R - r < O_1O_2 < R + r$$

$\overleftrightarrow{L}$: Secante común

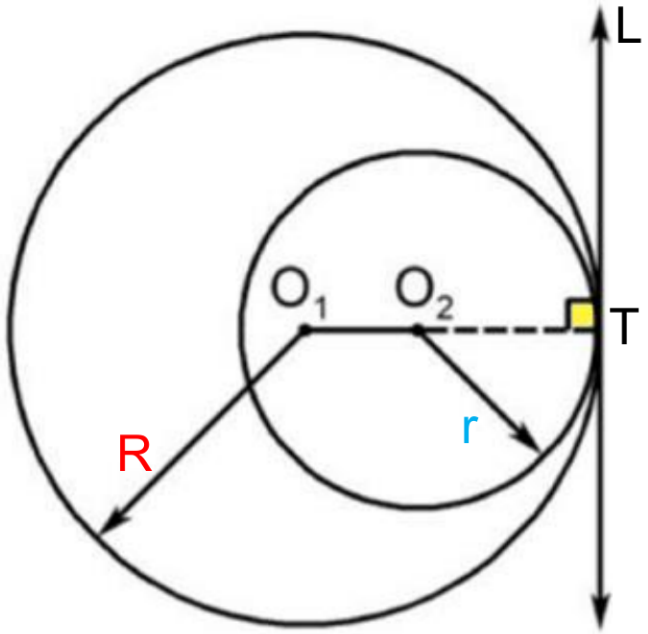
04. Circunferencias ortogonales: Son dos circunferencias secantes cuyos radios son perpendiculares en los puntos de las intersecciones.



$$O_1O_2 = \sqrt{R^2 + r^2}$$

POSICIONES RELATIVAS

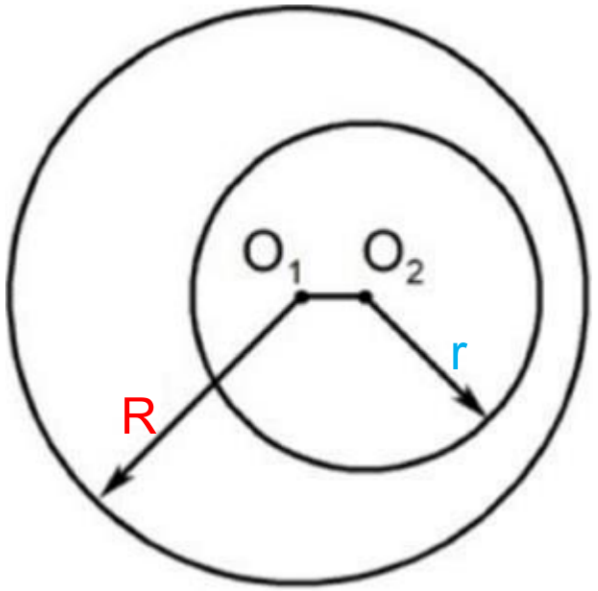
05. Circunferencias tangentes interiores: Cuando la distancia que une los centros de las 2 circunferencias es igual a la diferencia de las longitudes de los radios.



$$O_1O_2 = R - r$$

$\overleftrightarrow{L}$: Tangente común

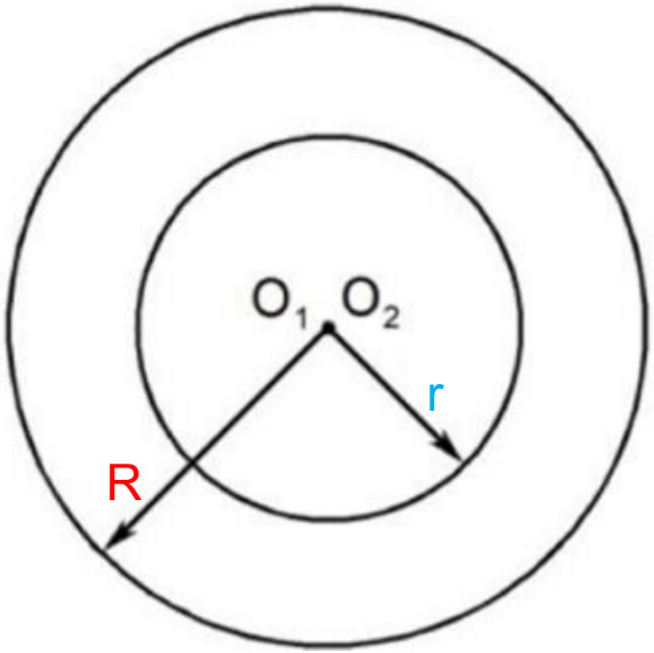
06. Circunferencias interiores: Cuando la distancia que une los centros de las 2 circunferencias es menor que la diferencia de las longitudes de los radios.



$$O_1O_2 < R - r$$

POSICIONES RELATIVAS

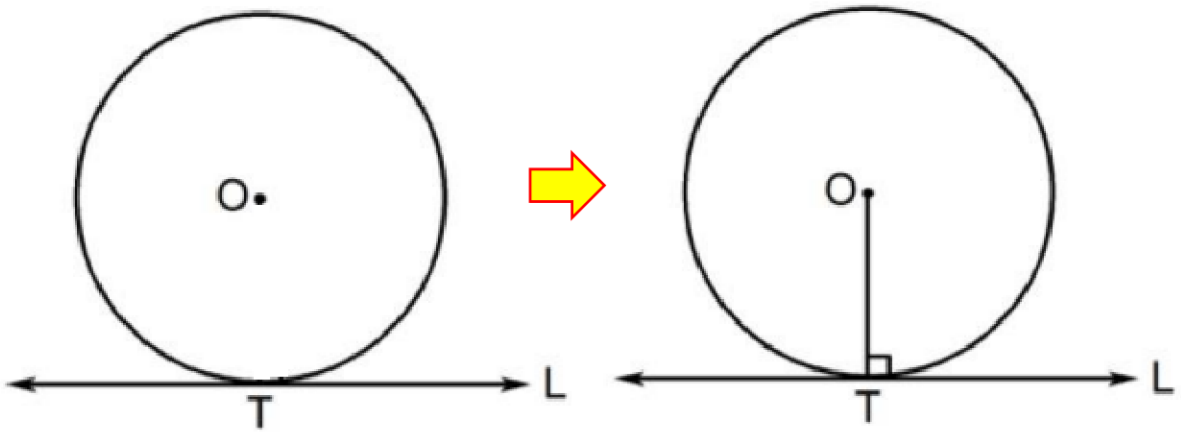
07. Circunferencias concéntricas: Cuando los centros de las 2 circunferencias coinciden.



$$O_1 = O_2$$

TEOREMAS

01. Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de contacto.



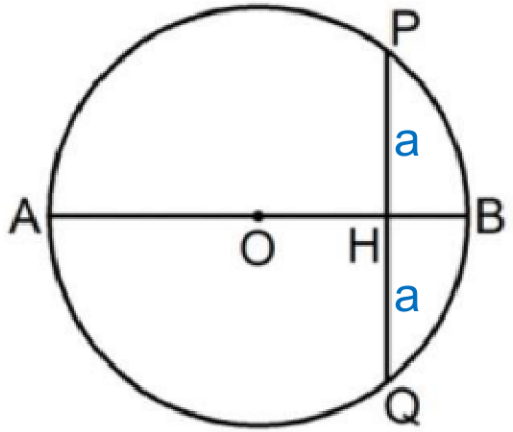
Si $\overleftrightarrow{L}$ es la recta tangente a la circunferencia de centro O en el punto T, entonces:

$$\overline{OT} \perp \overleftrightarrow{L}$$

Nota:

Toda recta perpendicular al radio en un punto de la circunferencia es tangente a la circunferencia.

02. Un diámetro que biseca a una cuerda diferente a un diámetro es perpendicular a dicha cuerda.



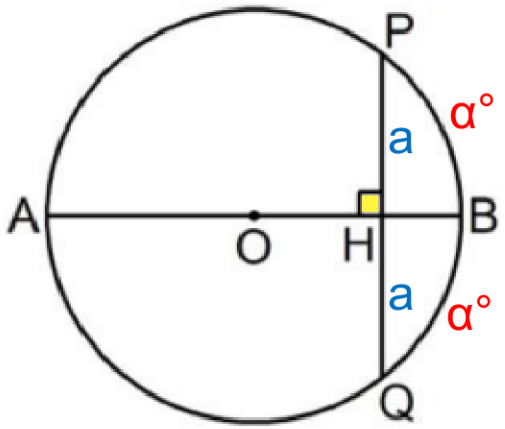
Si $\overline{AB}$ es diámetro y H es punto medio de la cuerda $\overline{PQ}$ ($\overline{PQ}$ no es diámetro), entonces:

$$\overline{AB} \perp \overline{PQ}$$

TEOREMAS

Nota 01:

Todo diámetro perpendicular a una cuerda, biseca a dicha cuerda y a su arco correspondiente



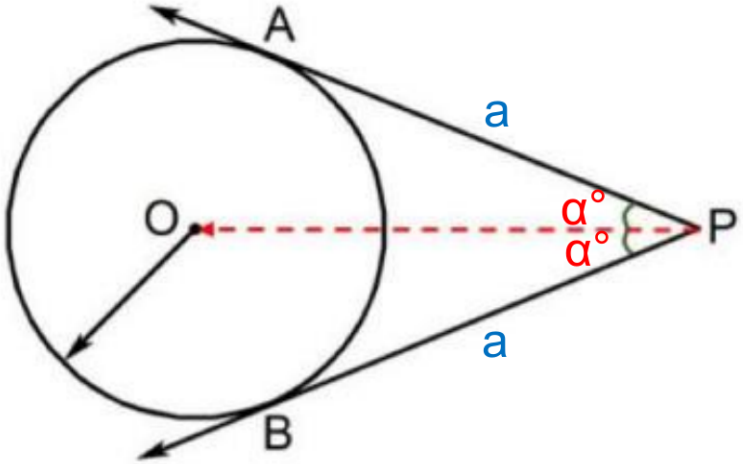
Si $\overline{AB}$ es diámetro y $\overline{AB} \perp \overline{PQ}$, entonces:

$PH = HQ$ $\quad$ $m\overset{\frown}{PB} = m\overset{\frown}{BQ}$

Nota 02:

La mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia.

03. Los segmentos de recta tangentes trazadas desde un mismo punto a una circunferencia son congruentes.



Si A y B son puntos de tangencia, entonces:

$PA = PB$

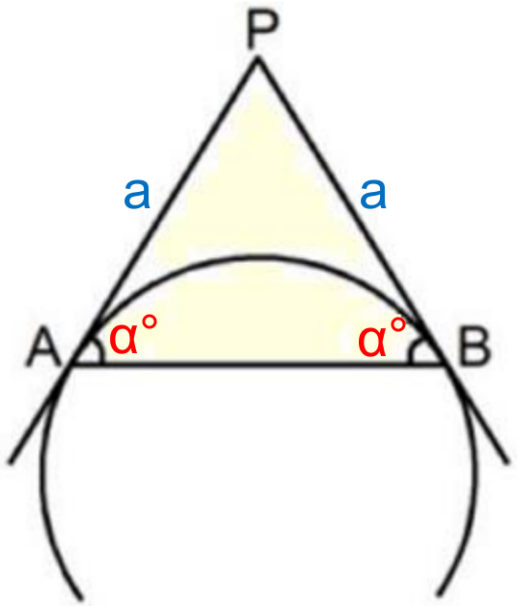
Nota 01:

$\overrightarrow{PO}$ es bisectriz del ángulo APB.

TEOREMAS

Nota 02:

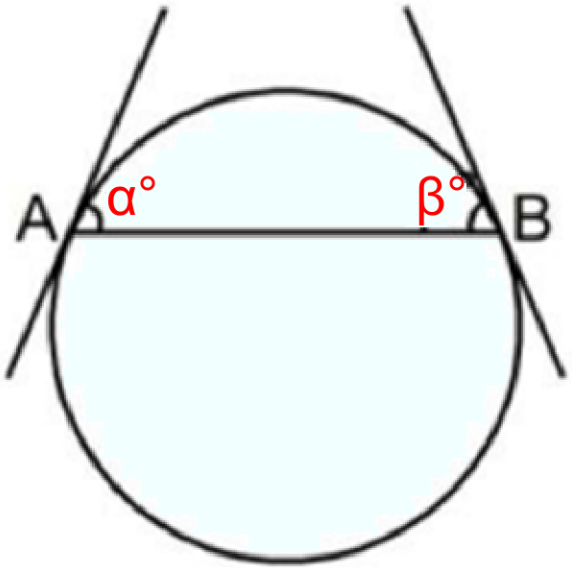
Al unir los puntos de tangencia A y B se forma un triángulo isósceles.



$$m\angle PAB = m\angle PBA$$

Ojo:

Si A y B son puntos de tangencia

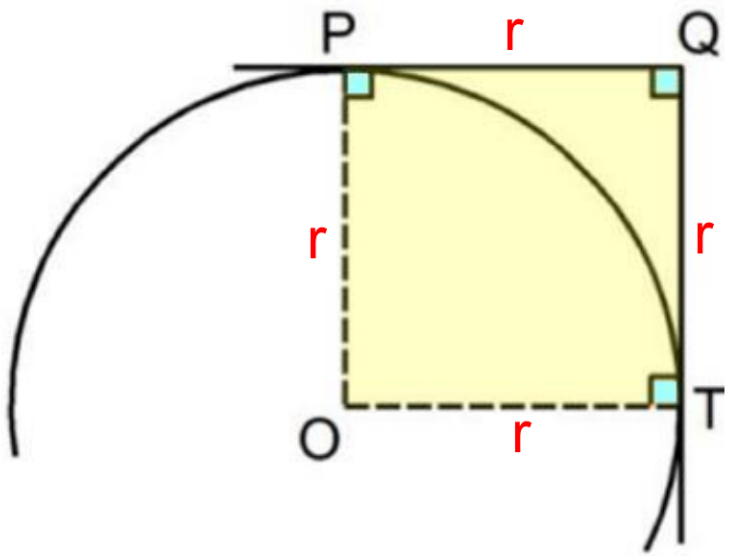


$$\alpha = \beta$$

TEOREMAS

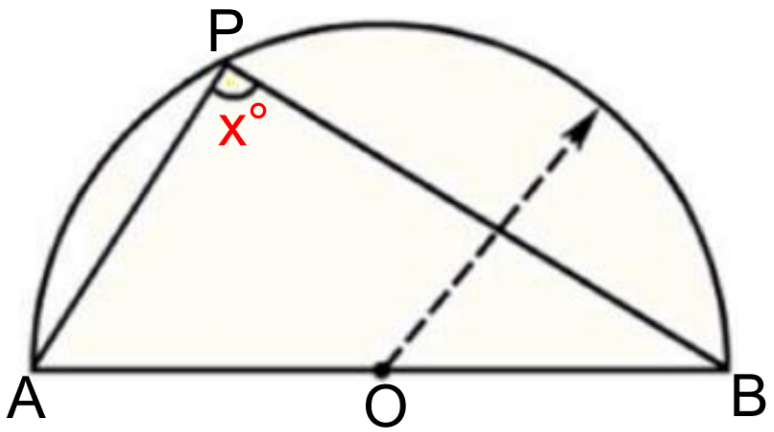
Observaciones:

01. Tangentes a una circunferencia que forman ángulo recto.



□OPQT: Cuadrado

02. Si $\overline{AB}$ es diámetro y P es un punto cualquiera de la semicircunferencia, entonces:

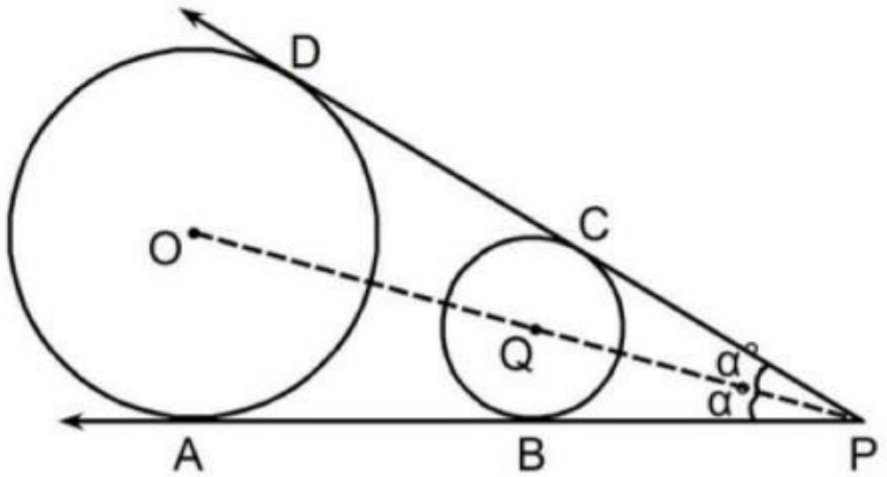


$m\angle APB = x = 90$

TANGENTES COMUNES

Tangentes comunes a dos circunferencias

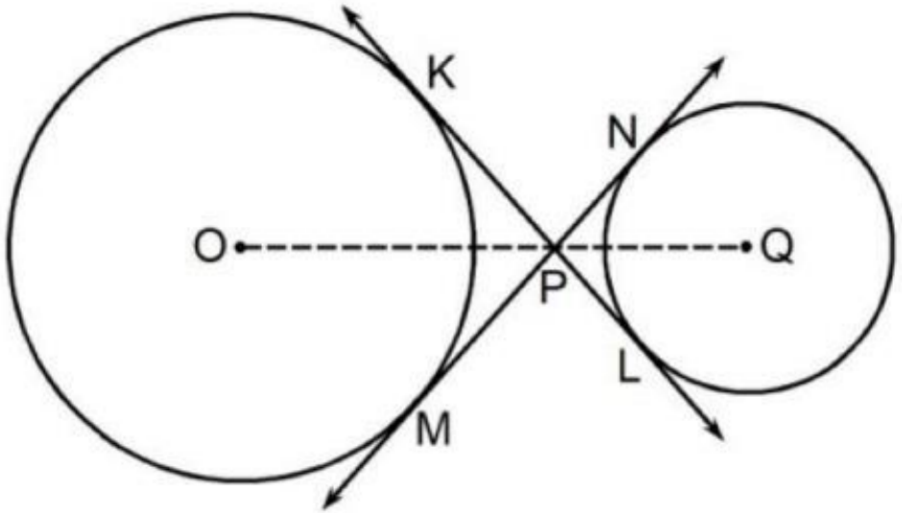
01. Tangentes comunes exteriores: $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$



$$AB = CD$$

O, Q y P son colineales.

02. Tangentes comunes interiores: $\overleftrightarrow{MN}$ y $\overleftrightarrow{KL}$

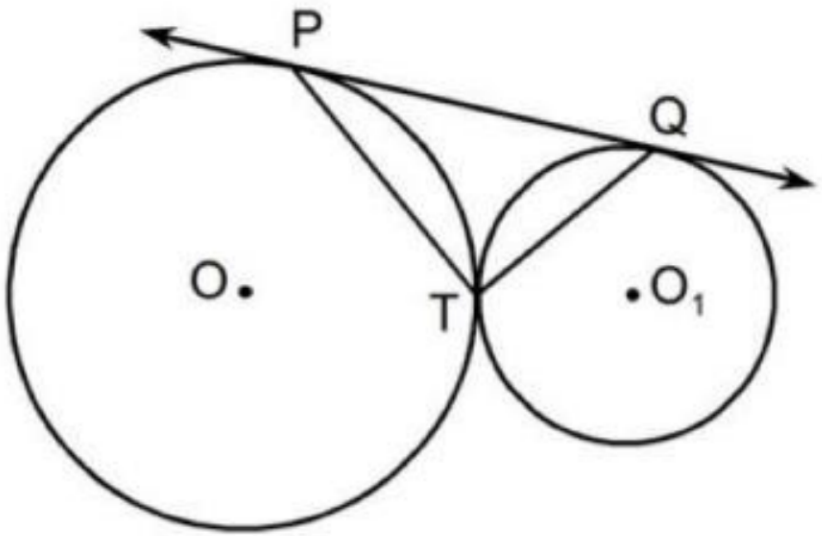


$$MN = KL$$

O, P y Q son colineales.

TANGENTES COMUNES

Consecuencia:

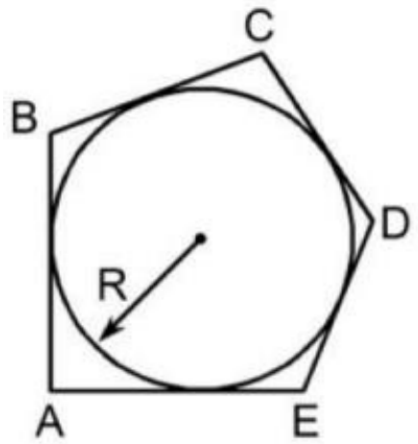


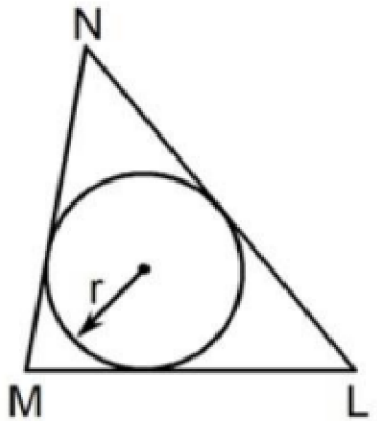
$$m\angle PTQ = 90$$

CIRCUNFERENCIA Y POLÍGONOS

Polígono circunscrito

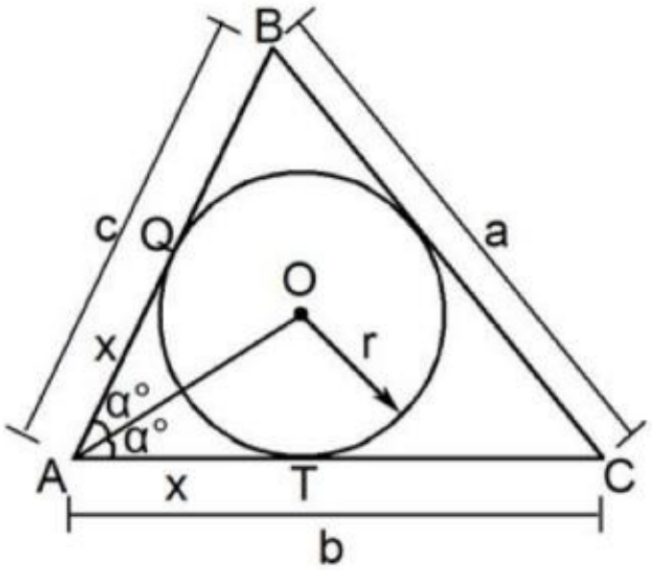
Un polígono está circunscrito a una circunferencia, si cada lado del polígono es tangente a la circunferencia. En este caso se dice que la circunferencia esta inscrita en el polígono, y a su correspondiente radio se le denomina inradio.





En la figura se muestran un pentágono y un triangulo circunscritos, "R" y "r" son los inradios correspondientes.

Circunferencia inscrita en el triángulo



O: Incentro
r: inradio

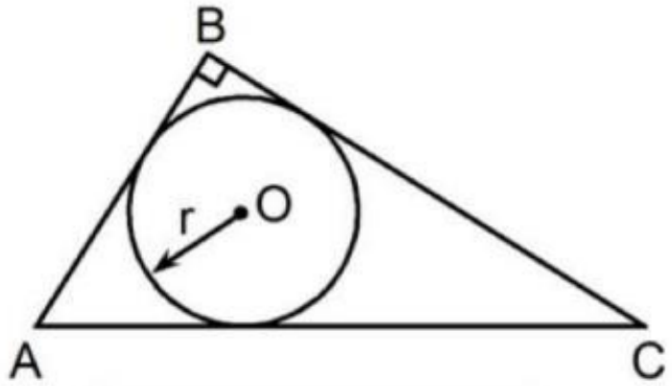
$$x = p - a$$

Donde: p = Semiperímetro del ΔABC

CIRCUNFERENCIA Y POLÍGONOS

Teorema de Poncelet

En todo triángulo rectángulo la suma de las longitudes de los catetos es igual a la suma de las longitudes de la hipotenusa y el diámetro de la circunferencia inscrita.



$$AB + BC = AC + 2r$$

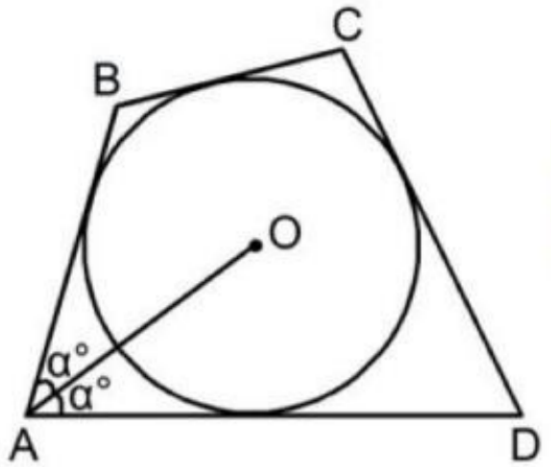
$$AC + AB + BC = AC + 2r + AC$$

$$2p = 2AC + 2r$$

$$\therefore p = AC + r$$

Cuadrilátero circunscrito

En todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia se cumple que la suma de las longitudes de dos lados opuestos es igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados.



$$AB + CD = BC + AD$$

Teorema de Pithot

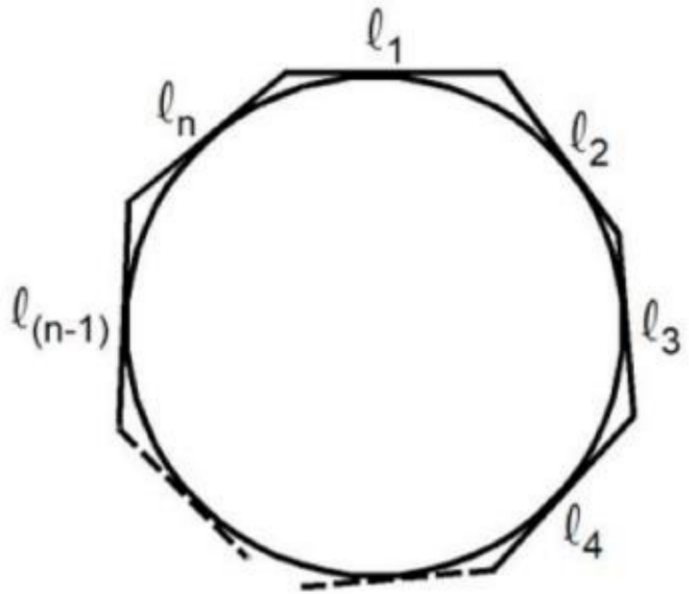
NOTA

Si se cumple el teorema de Pithot en un cuadrilátero convexo, entonces dicho cuadrilátero es circunscriptible a una circunferencia.

CIRCUNFERENCIA Y POLÍGONOS

Generalización del teorema de Pithot

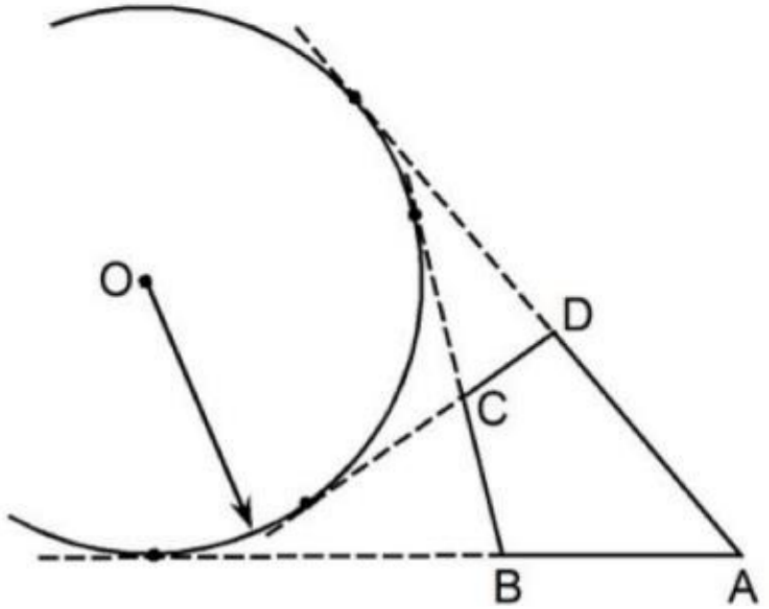
Para todo polígono circunscrito cuyo número de lados (n) es par:



$$\ell_1 + \ell_3 + \cdots + \ell_{n-1} = \ell_2 + \ell_4 + \cdots + \ell_n$$

Cuadrilátero exinscrito

Un cuadrilátero se dice que está ex-inscrito a una circunferencia, si las prolongaciones de sus cuatro lados son tangentes a dicha circunferencia.



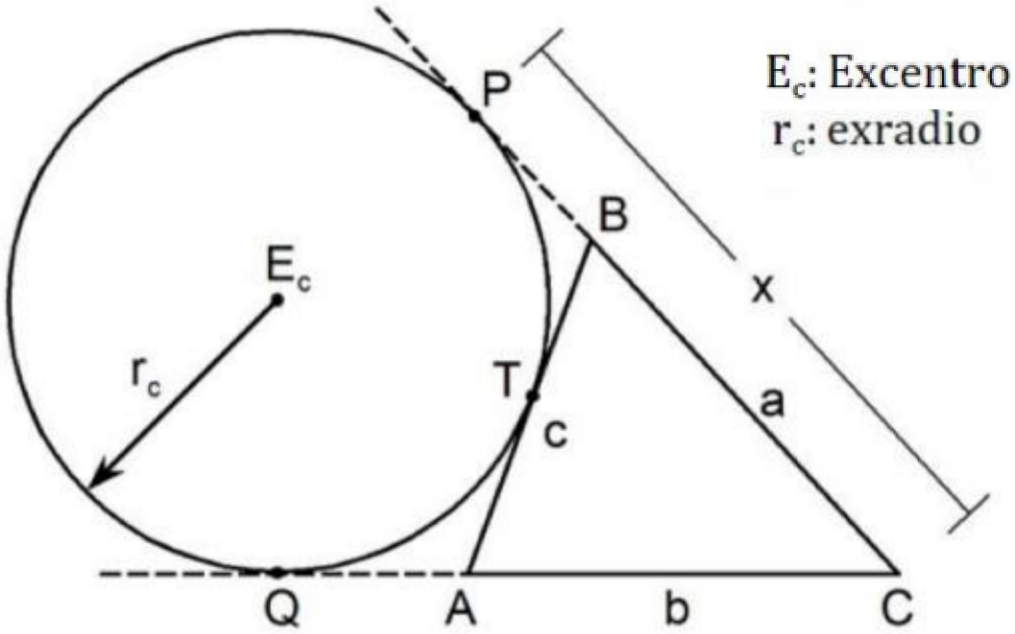
$$AB - CD = AD - BC$$

Teorema de Steiner

CIRCUNFERENCIA Y POLÍGONOS

Circunferencia ex-inscrita a un triángulo

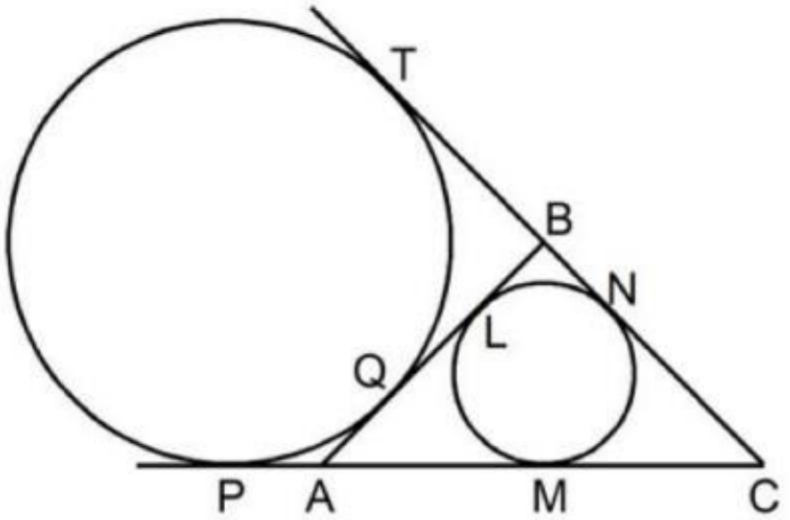
Es aquella circunferencia tangente a uno de los lados del triángulo, al cual es relativa, y tangente a las prolongaciones de los otros dos.



E_c: Excentro
r_c: exradio

$$x = \frac{a+b+c}{2}$$

Propiedades



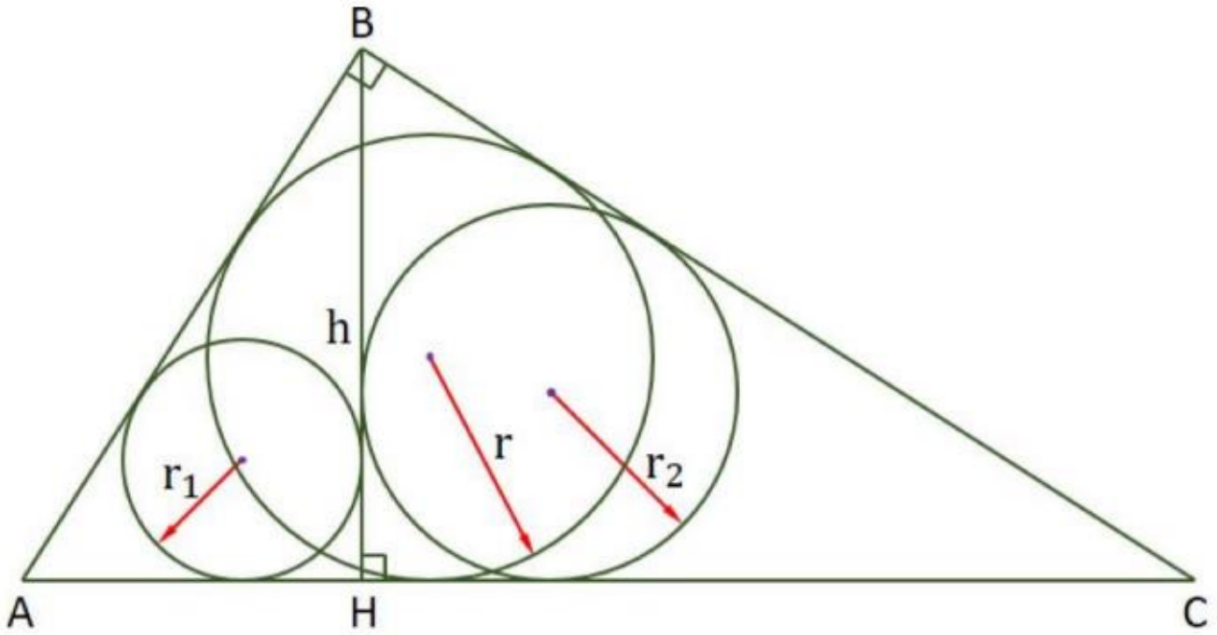
$$PA = BN$$

$$QL = AC - BC$$

$$TN = PM = AB$$

CIRCUNFERENCIA Y POLÍGONOS

PROPIEDAD



$$h = r + r_1 + r_2$$

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2$$

EJEMPLOS

EJEMPLO:

En la figura, AOB es un cuadrante. Si U, L, S y T son puntos de tangencia, halle x.

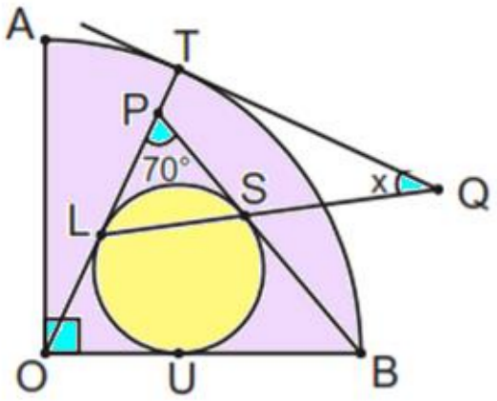
A) 45°

B) 35°

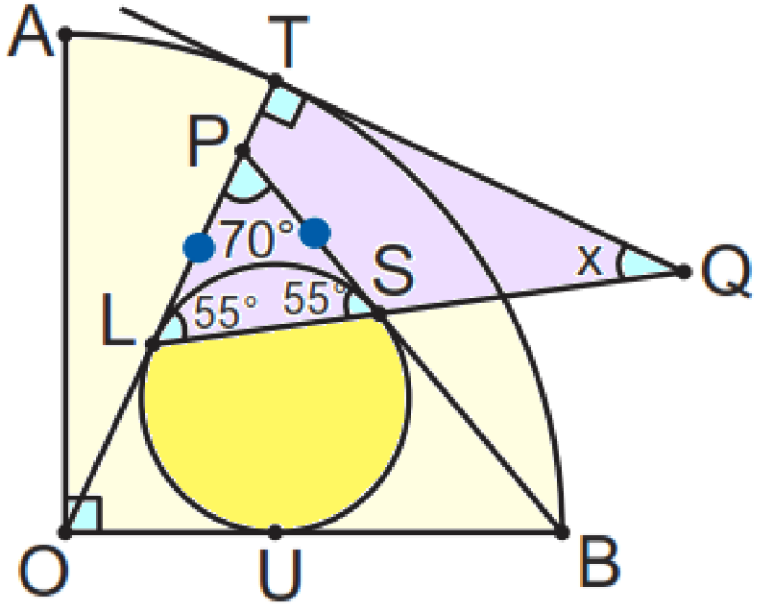
C) 37°

D) 53°

E) 40°



RESOLUCIÓN:



Si T es punto de tangencia $m\overset{\frown}{OTQ} = 90$

Si L y S son puntos de tangencia. LP=PS

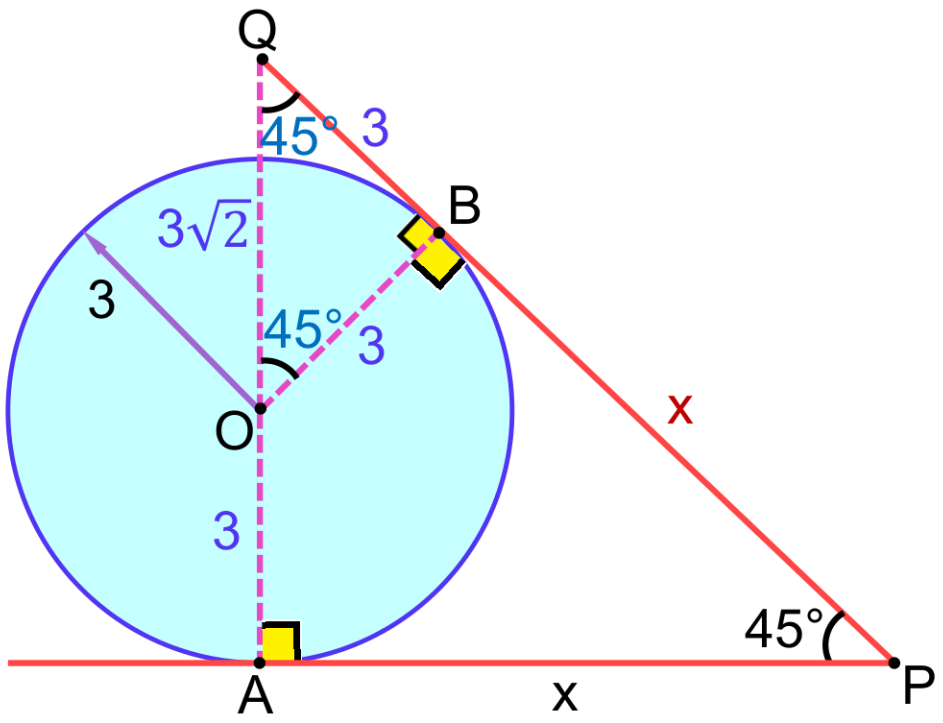
en el $\triangle$ LTQ: $55 + x = 90$

$\therefore x = 35°$

EJEMPLO

Desde un punto P exterior a una circunferencia de radio igual a 3, se trazan las tangentes $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ (A y B son puntos de tangencia). Calcular PB, si se sabe: $m\angle APB = 45°$.

Resolución:

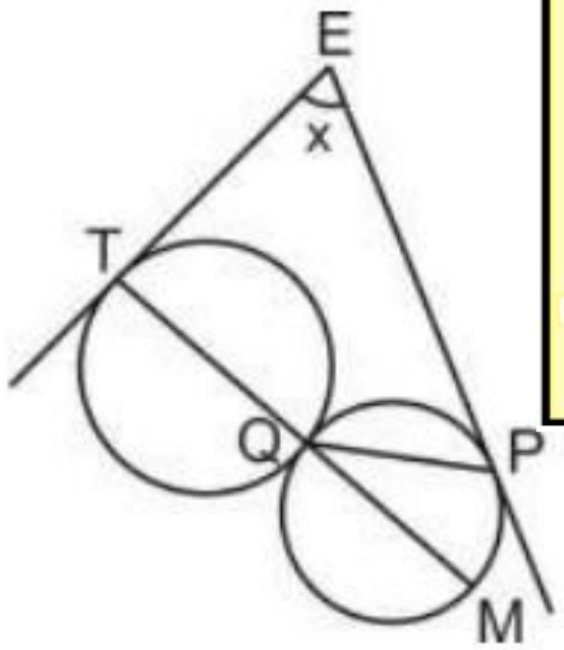


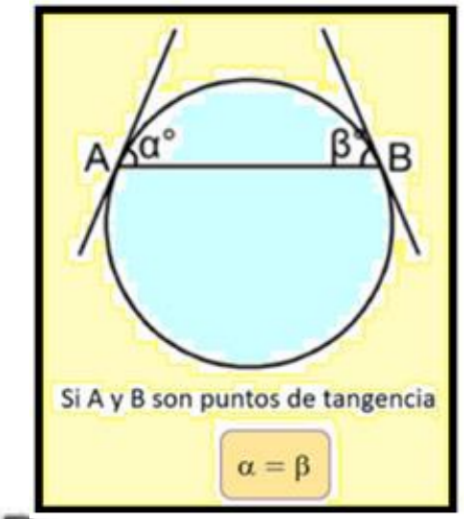
- Teorema: PA = PB = x
- Teorema: $\overline{OA} \perp \overline{PA}$ y $\overline{OB} \perp \overline{PB}$
- Prolongamos $\overline{AO}$ y $\overline{PB}$ hasta el punto Q.
- Se observa: $\triangle QAP$ y $\triangle OBQ$ son notables de 45° y 45°
- $\triangle QBO$: OB = BQ = 3
  $\rightarrow OQ = 3\sqrt{2}$
- $\triangle QAP$: QA = AP = x
  $\rightarrow QA = 3 + 3\sqrt{2}$
  $\therefore x = 3 + 3\sqrt{2}$

APLICACIÓN

EJEMPLO:

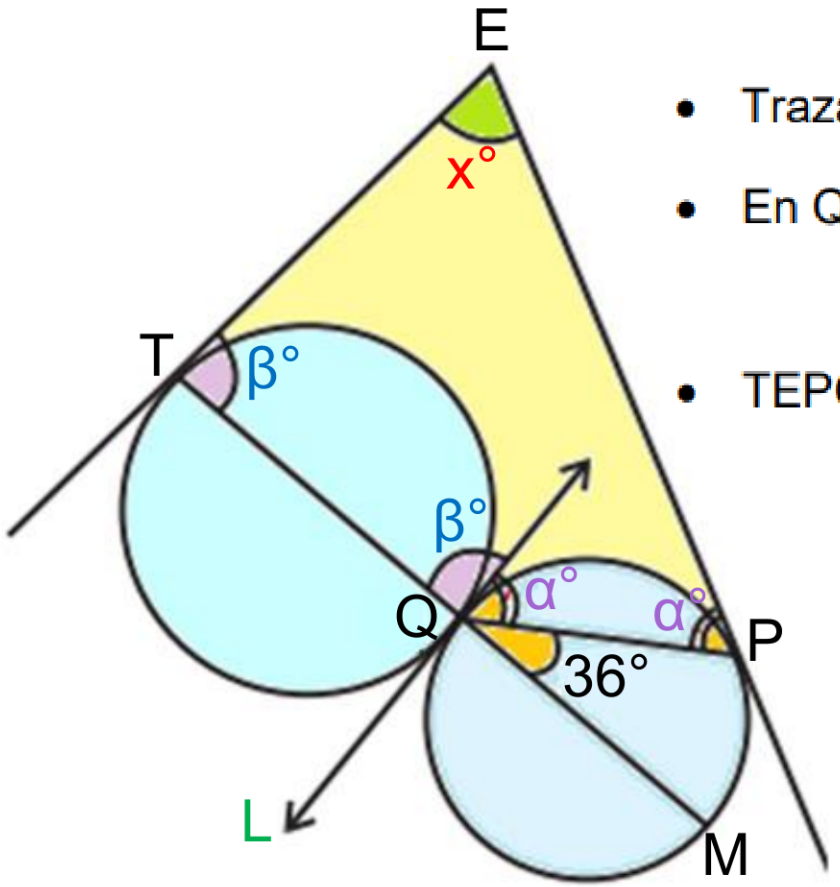
En la figura, T, P y Q son puntos de tangencia. Si m∠PQM = 36, halle el valor de x.





A) 60 B) 66 C) 72 D) 75 E) 84

RESOLUCIÓN:



- Trazar la recta tangente L
- En Q:

$$\alpha + \beta = 144$$

- TEPQ: Prop.

$$x + 2(\underbrace{\alpha + \beta}_{144}) = 360$$

$$\therefore \quad x = 72$$

EJERCICIOS

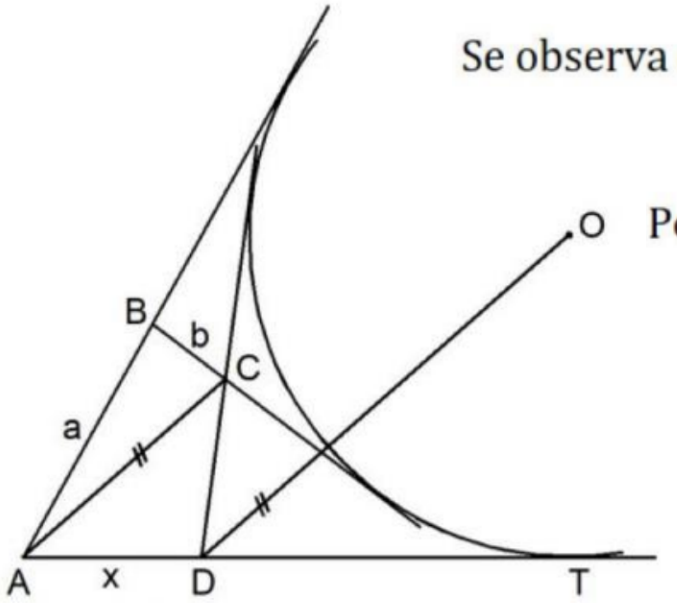
El cuadrilátero convexo ABCD es exinscrito a una circunferencia de centro O, las prolongaciones de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$ y $\overline{AD}$ son tangentes a la circunferencia. Si $\overline{AC} \parallel \overline{DO}$, AB=a u y BC=b u, entonces AD (en u) es:

A) a+b B) $\frac{a+b}{4}$ C) $\frac{a+b}{3}$

D) $\frac{a+b}{2}$ E) 2(a-b)

RESOLUCIÓN:

Colocamos los datos en el gráfico.

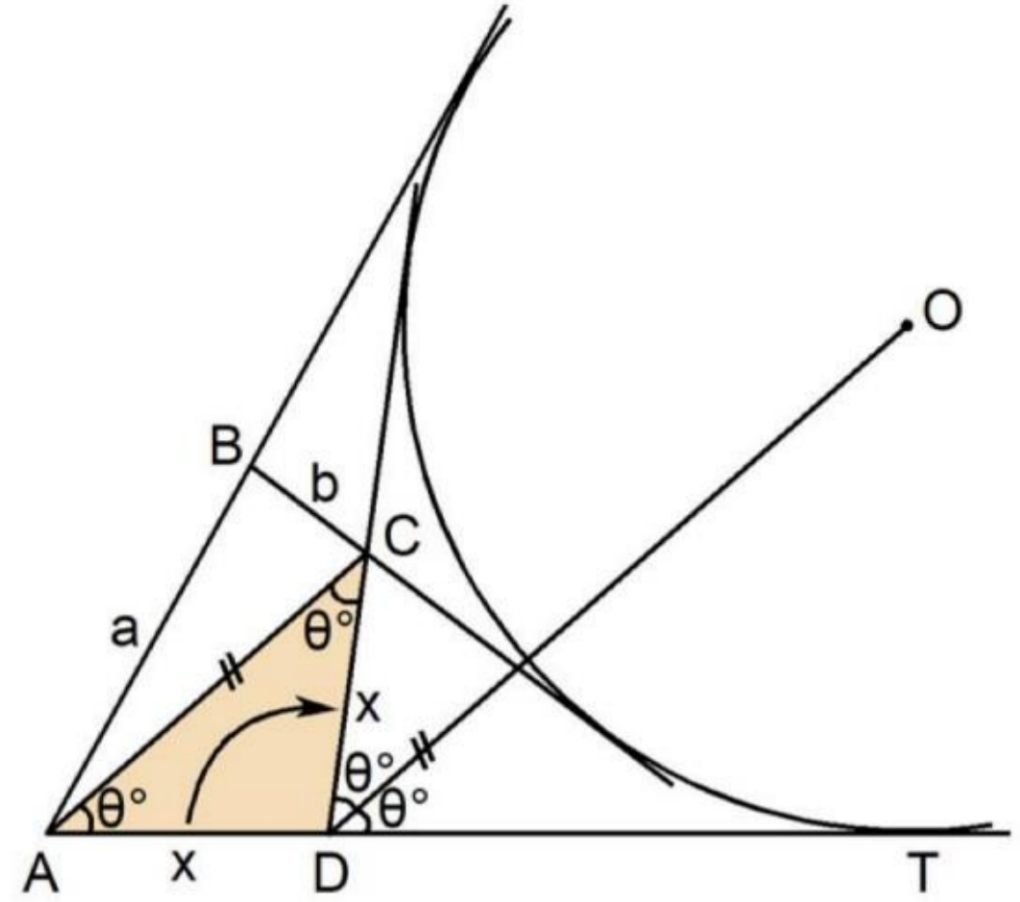


Se observa que $\overline{DO}$ es bisectriz, luego:

$$m\angle CDO = m\angle ODT = \theta$$

Por dato $\overline{AC} \parallel \overline{DO}$, entonces:

$$m\angle ACD = m\angle CAD = \theta$$



Luego el triángulo ADC es isósceles, entonces: $AD = x = DC$

Finalmente, por teorema de Steiner:

$$a - x = x - b$$
$$a + b = 2x$$
$$\therefore x = \frac{a+b}{2}$$

EJERCICIOS

En un triángulo acutángulo ABC (AB<BC), se traza la altura $\overline{BH}$. Los radios de las circunferencias inscritas a los triángulos AHB y BHC miden r_1 y r_2, respectivamente. Calcule la longitud de la perpendicular trazada desde el centro de la circunferencia inscrita al triángulo ABC, a la altura $\overline{BH}$.

A) $\sqrt{r_1 r_2}$ B) $r_2 - r_1$ C) $\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}$

D) $2\sqrt{r_1 r_2}$ E) $\frac{r_2 - r_1}{2}$

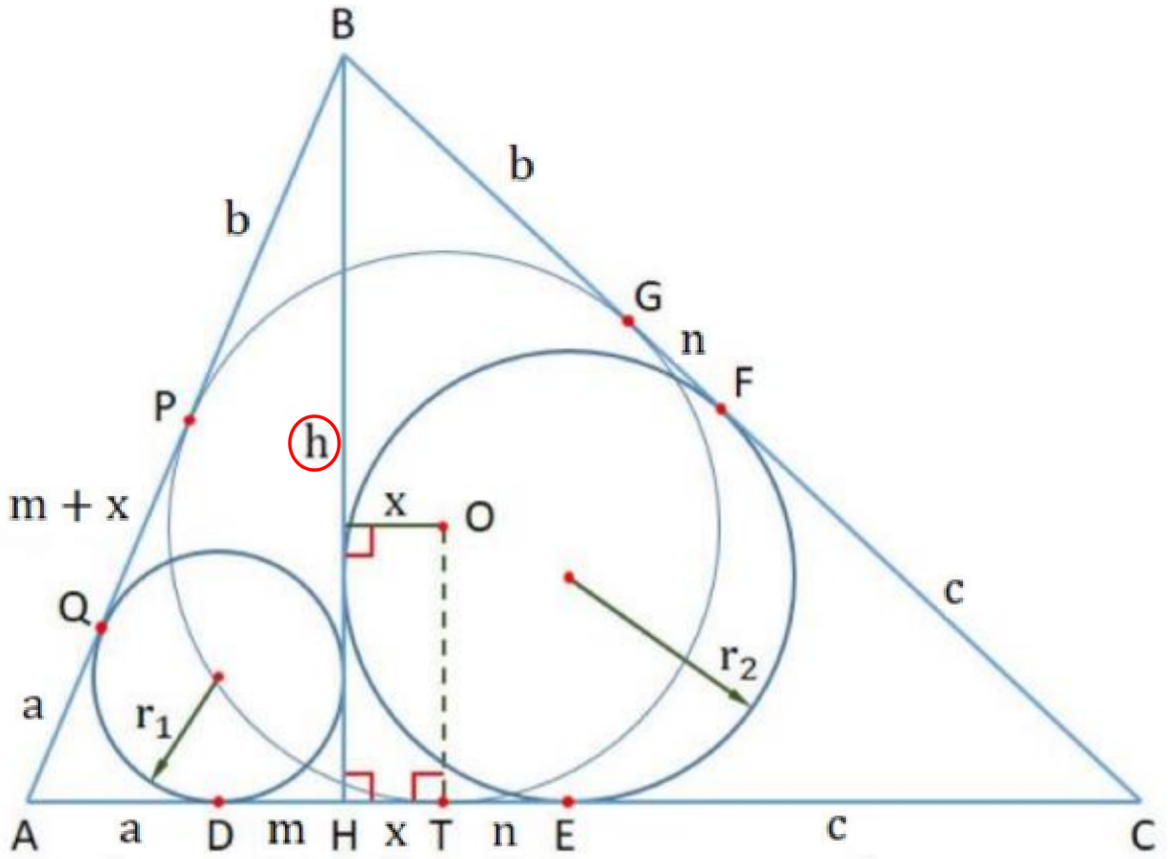
RESOLUCIÓN:

Se pide: $d_{(O,\overline{BH})} = x$

Trazamos $\overline{OT}$, luego: $HT = x$

En cada vértice señalemos los segmentos de tangente congruentes, además de recordar que los segmentos de tangente común exterior a dos circunferencias, también son congruentes.

Sea $BH = h$ y por el teorema de Poncelet tendremos:



ΔAHB: $h + (a + m) = [a + (m + x) + b] + 2r_1$

ΔBHC: $h + (x + n + c) = [b + (n) + c] + 2r_2$

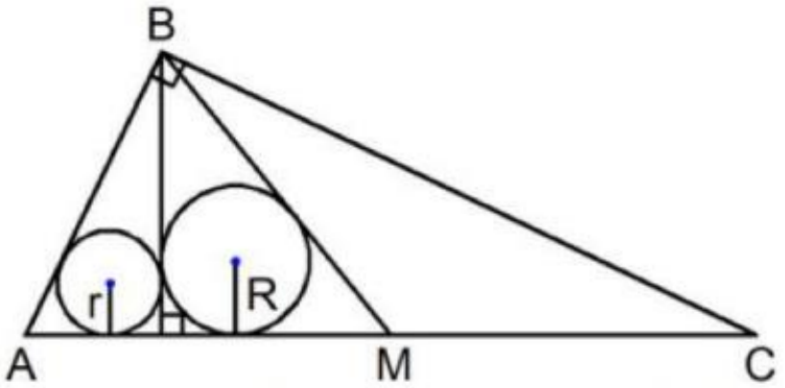
Restando, obtendremos:

$$x = 2r_2 - x - 2r_1$$

$$\therefore x = r_2 - r_1$$

EJERCICIOS

En la figura M es punto medio de $\overline{AC}$ y las circunferencias están inscritas en los triángulos. Si $AB=k_1r$ y $R=k_2r$, entonces se cumple la relación:



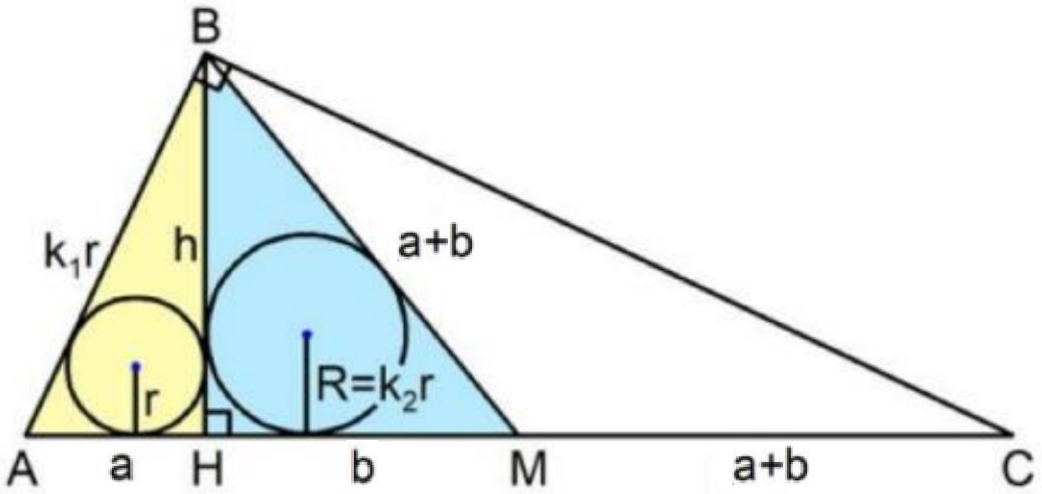
A) $\frac{k_1+1}{k_2} < 2$ B) $\frac{k_1+1}{k_2} < 1$ C) $\frac{k_1+k_2}{k_1} < \frac{1}{2}$

D) $\frac{k_1+k_2}{k_1} < 2$ E) $\frac{k_2+1}{k_1} < \frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN:

Por teorema de Poncelet:

$$\Delta AHB:\ a + h = k_1r + 2r$$
$$\Delta BHM:\ h + b = a + b + 2k_2r \quad (+)$$



Sumando:

$$2h = k_1r + 2r + 2k_2r$$

Además en ΔAHB:

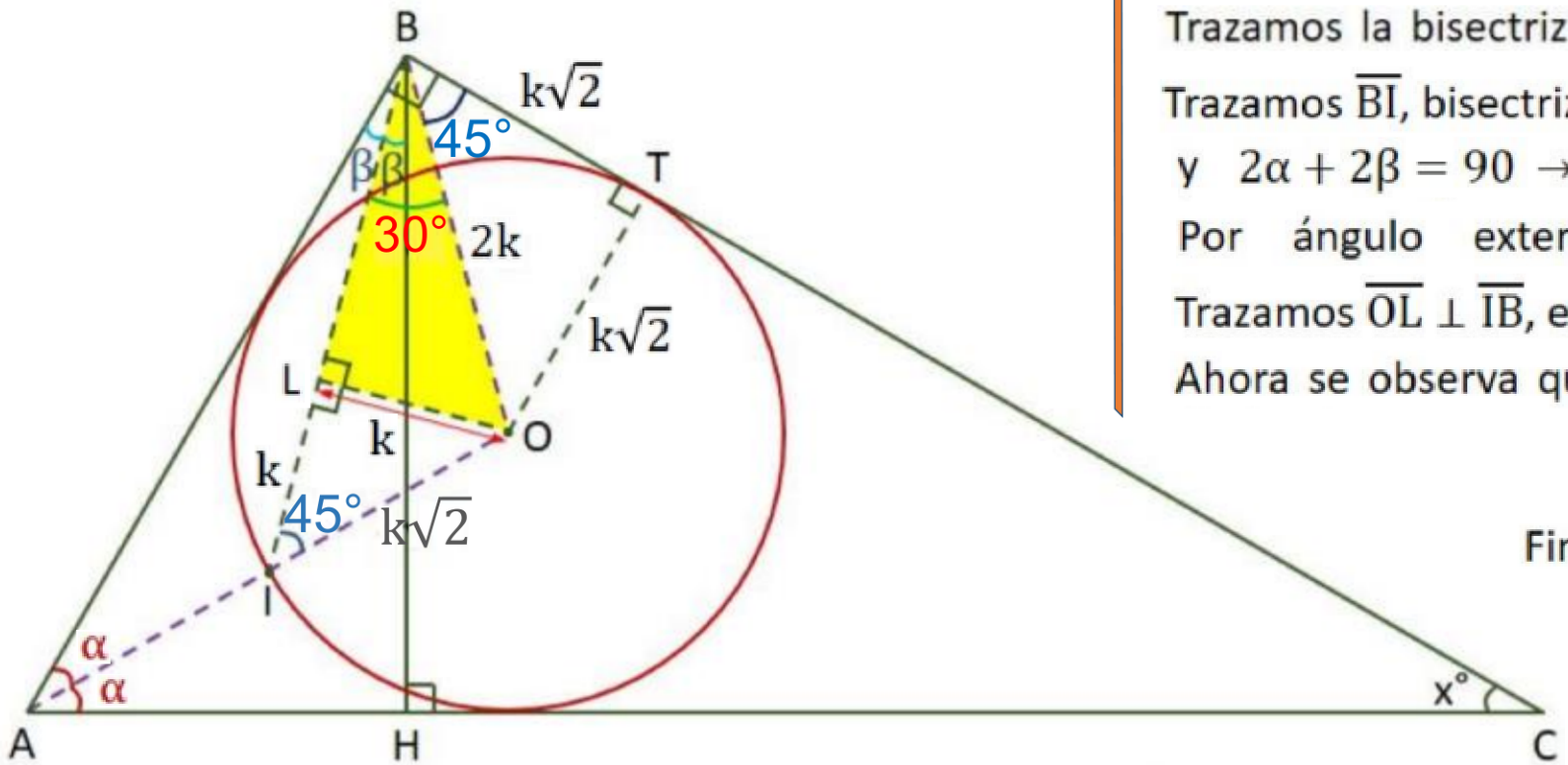
$$h < k_1r$$
$$\rightarrow 2h < 2k_1r$$
$$\rightarrow k_1r + 2r + 2k_2r < 2k_1r$$
$$\rightarrow 2(1 + k_2) < k_1$$
$$\therefore \frac{k_2 + 1}{k_1} < \frac{1}{2}$$

EJERCICIOS

En un triángulo rectángulo ABC de altura $\overline{BH}$, la circunferencia inscrita contiene al incentro del triángulo ABH. Calcular $m\angle C$.

A) 30 B) 45 C) 15
D) 37 E) 53

RESOLUCIÓN:



Trazamos $\overline{BO}$ y unimos el centro O con el punto de tangencia T (T en $\overline{BC}$), luego:

$m\angle OBT = 45,\ m\angle OTB = 90,\ OT = k\sqrt{2} = TB = IO$ y $OB = 2k$

Se pide: $m\angle C = x$

Dato: I incentro del triángulo ABH

I pertenece a la circunferencia de centro O

Trazamos la bisectriz del ángulo A, ésta contiene a los puntos I y O.

Trazamos $\overline{BI}$, bisectriz del ángulo ABH, luego: $x = 2\beta$ (Propiedad)

y $2\alpha + 2\beta = 90 \rightarrow \alpha + \beta = 45$

Por ángulo exterior en el triángulo ABI: $m\angle BIO = 45$

Trazamos $\overline{OL} \perp \overline{IB}$, entonces: $OL = k$

Ahora se observa que el triángulo OLB es notable, de donde:

$$m\angle OBL = 30$$

Finalmente, en B: $\beta = 15$

$$\therefore x = 30$$

EJEMPLO

EJEMPLO:

Se tiene el cuadrante AOB de centro O, en $\overline{OA}$ se ubica el punto C tal que $\overline{AC}$ mide igual que el diámetro de la circunferencia inscrita en el triángulo BOC. Calcular $m\angle CBO$.

A) 30 B) 37 C) 26,5
D) 18,5 E)22,5

RESOLUCIÓN:

Se pide: $m\angle CBO = x$

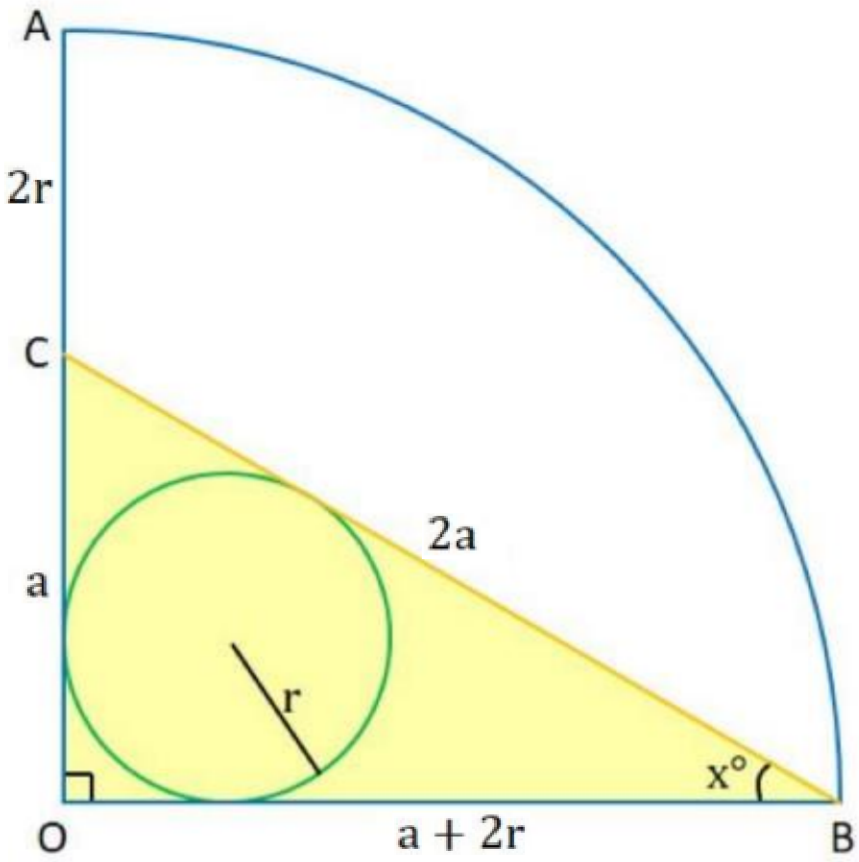
Sea: $CO = a$

$\rightarrow OB = OA = a + 2r$

Por Poncelet en el triángulo COB:

$(a) + (a + 2r) = BC + 2r$

$\rightarrow BC = 2a$



Finalmente el triángulo BOC es notable.

$\therefore x = 30$

EJEMPLO

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se sabe que: AB=7 y BC=24. Calcular la medida del radio de la circunferencia exinscrita relativa a la hipotenusa $\overline{AC}$.

A) 24 B) 15 C) 26
D) 3 E) 28

RESOLUCIÓN:

Se pide: x

En el triángulo ABC

$$AC = 25$$

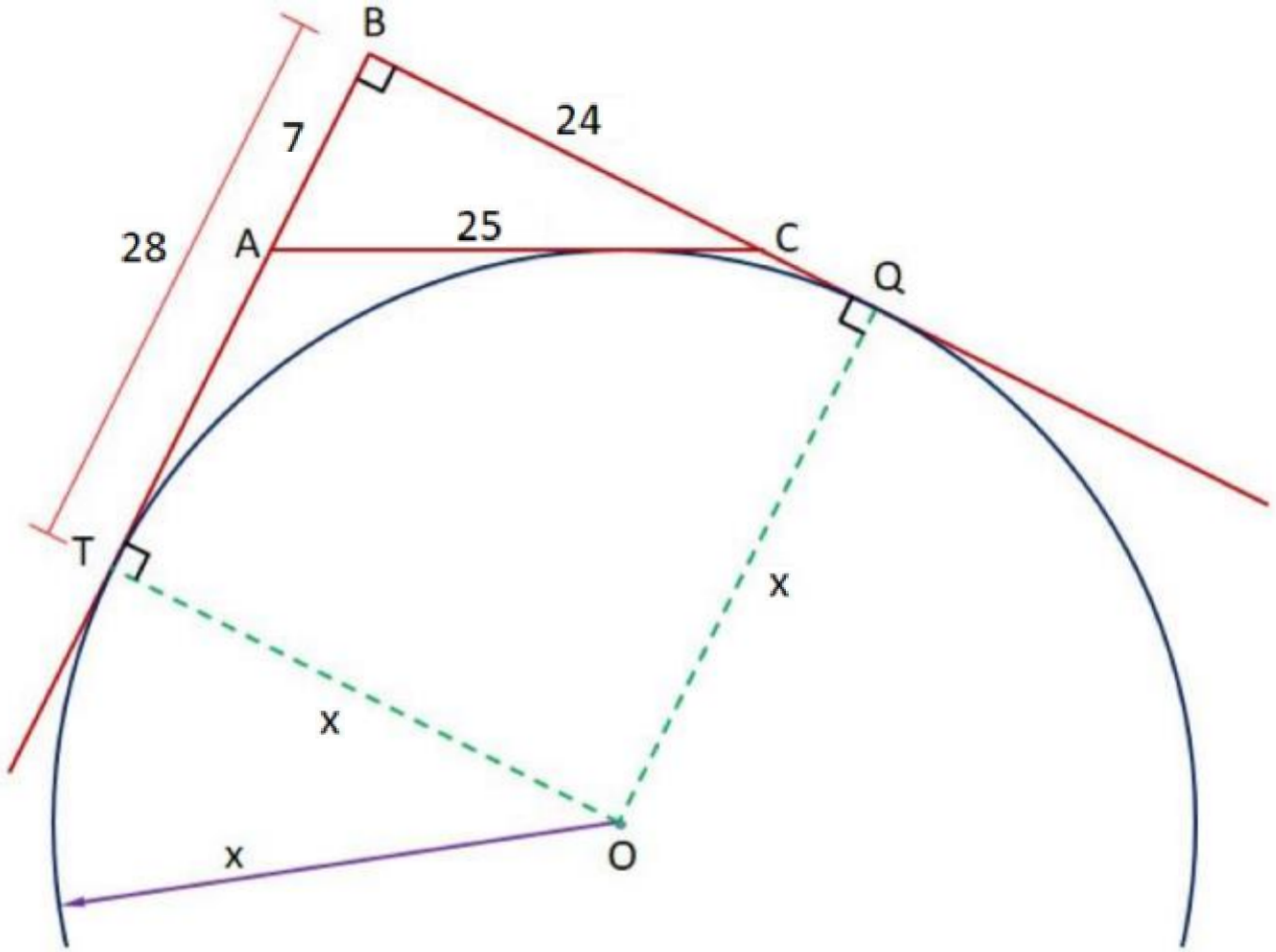
Trazamos $\overline{OT}$ y $\overline{OQ}$ para formar el cuadrado OTBQ.

Por propiedad: $BT = p$ (semiperímetro)

$$\rightarrow BT = \frac{7 + 24 + 25}{2} = 28$$

Finalmente en el cuadrado OTBQ:

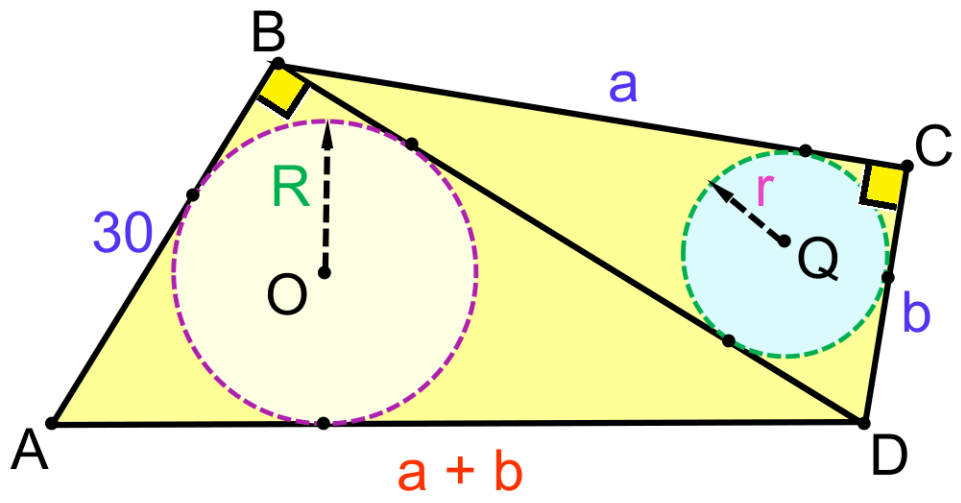
$$\therefore x = 28$$



EJEMPLO

Sea ABCD un cuadrilátero convexo, tal que: $m\angle C = m\angle ABD = 90°$, $AD = BC + CD$, $AB = 30$. Calcular la suma de los inradios de los triángulos ABD y CBD.

Resolución:



- ΔABD: Teorema de Poncelet

$$AB + BD = 2R + AD$$

$$30 + BD = 2R + a + b \ldots (I)$$

- ΔABC: Teorema de Poncelet

$$BC + CD = 2r + BD$$

$$a + b = 2r + BD \ldots (II)$$

- De (I) + (II):

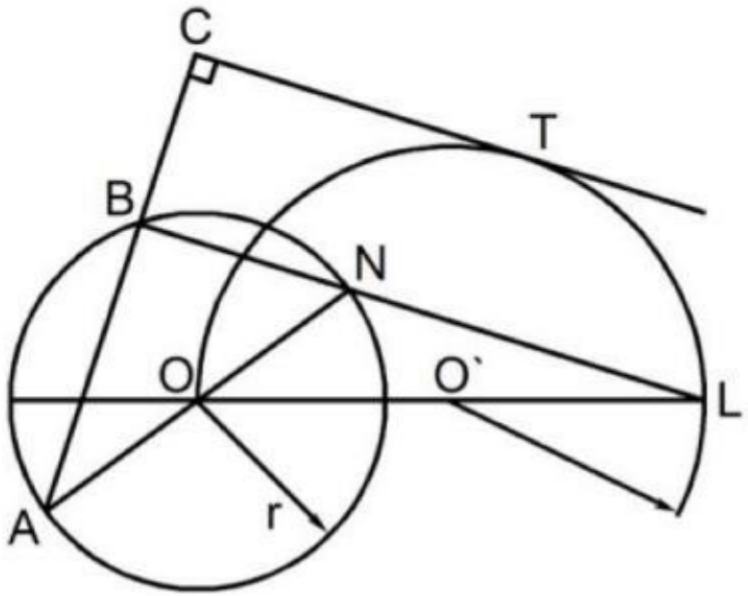
$$30 + BD + a + b = 2R + a + b + 2r + BD$$

$$30 = 2R + 2r$$

$$\therefore R + r = 15$$

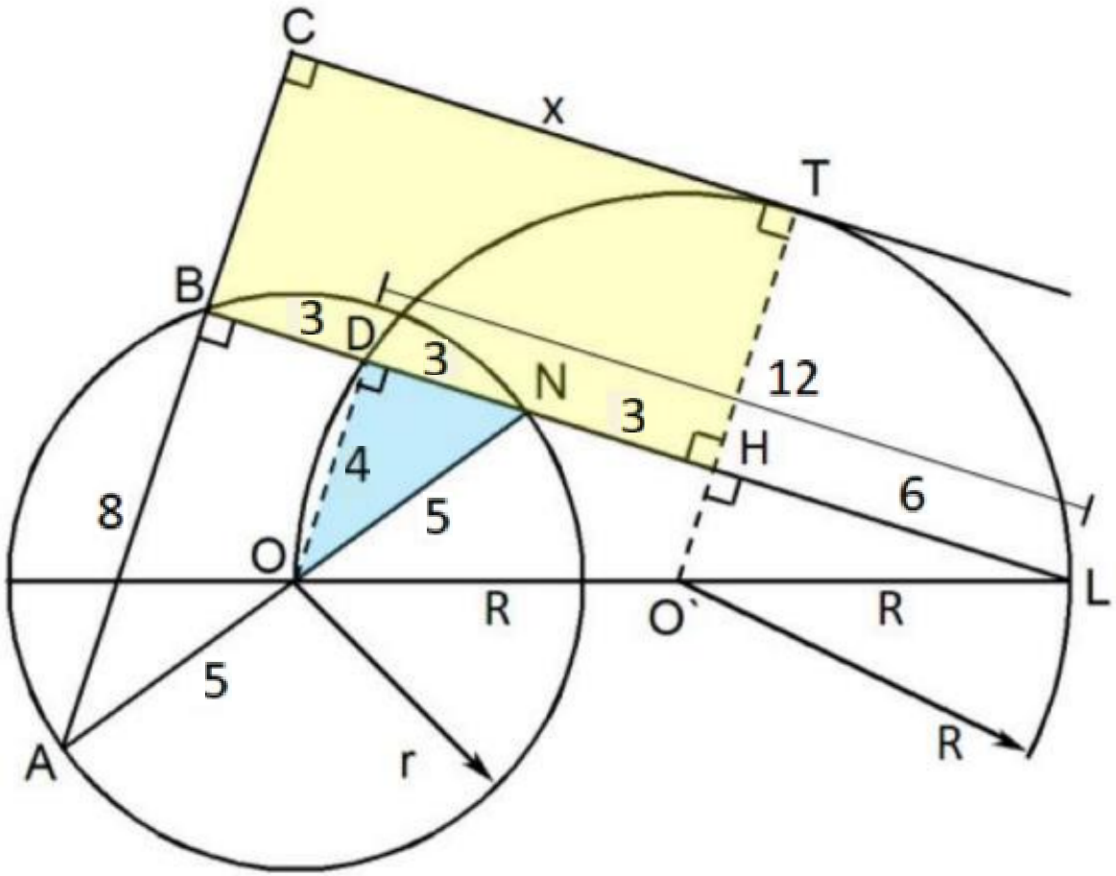
EJEMPLO

En la figura T es punto de tangencia, AB=8, BL=15 y r=5. Calcular CT.



A) 8 B) 9 C) 8,5
D) 9,5 E) 10

RESOLUCIÓN:



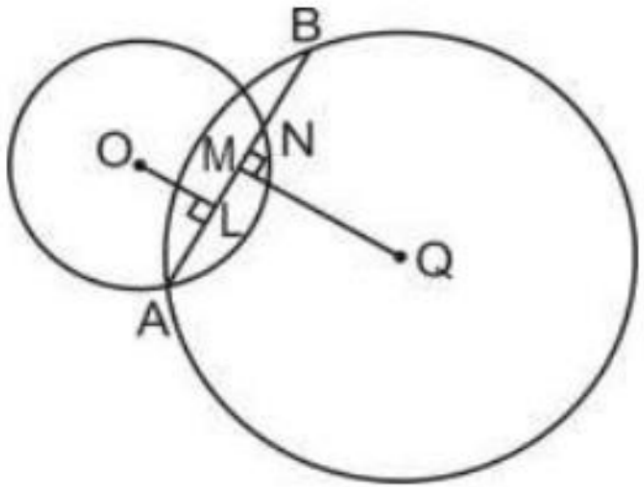
□BCTH: Rectángulo

$\therefore x = 9$

APLICACIÓN

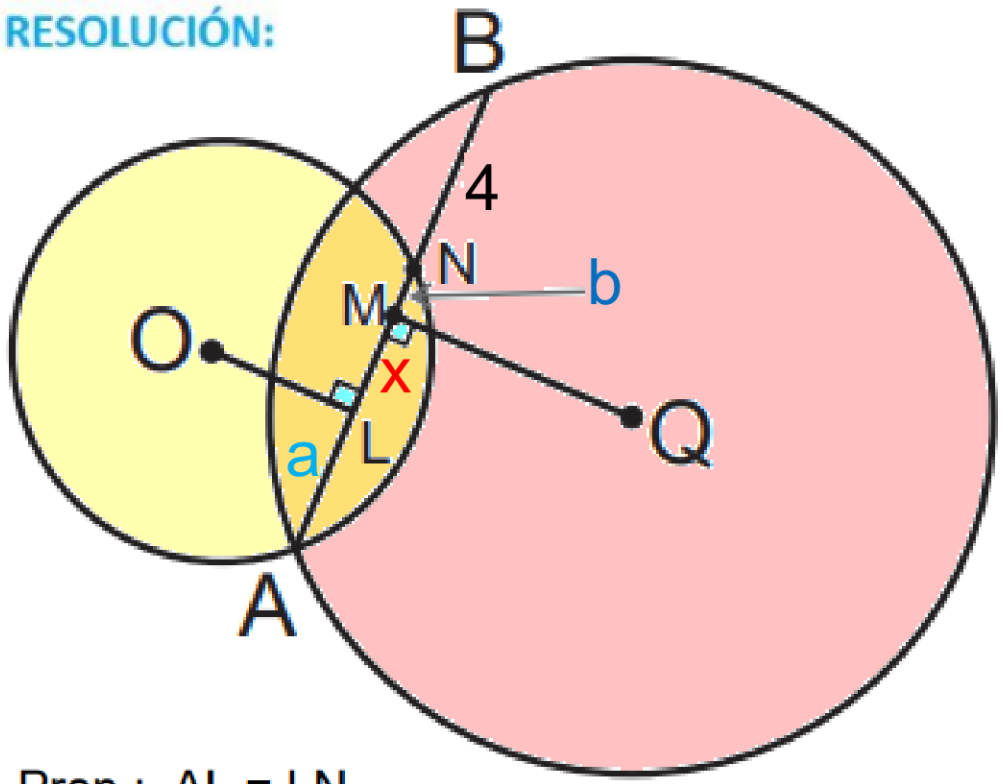
EJEMPLO:

En la figura, O y Q son centros de las circunferencias. Si NB = 4 m, halle LM.



A) 1 m B) 2 m C) 3 m D) 2,5 m E) 1,5 m

RESOLUCIÓN:



- Prop.: AL = LN

  a = x + b ..... (1)

- Prop.: AM = MB

  a + x = b + 4..... (2)

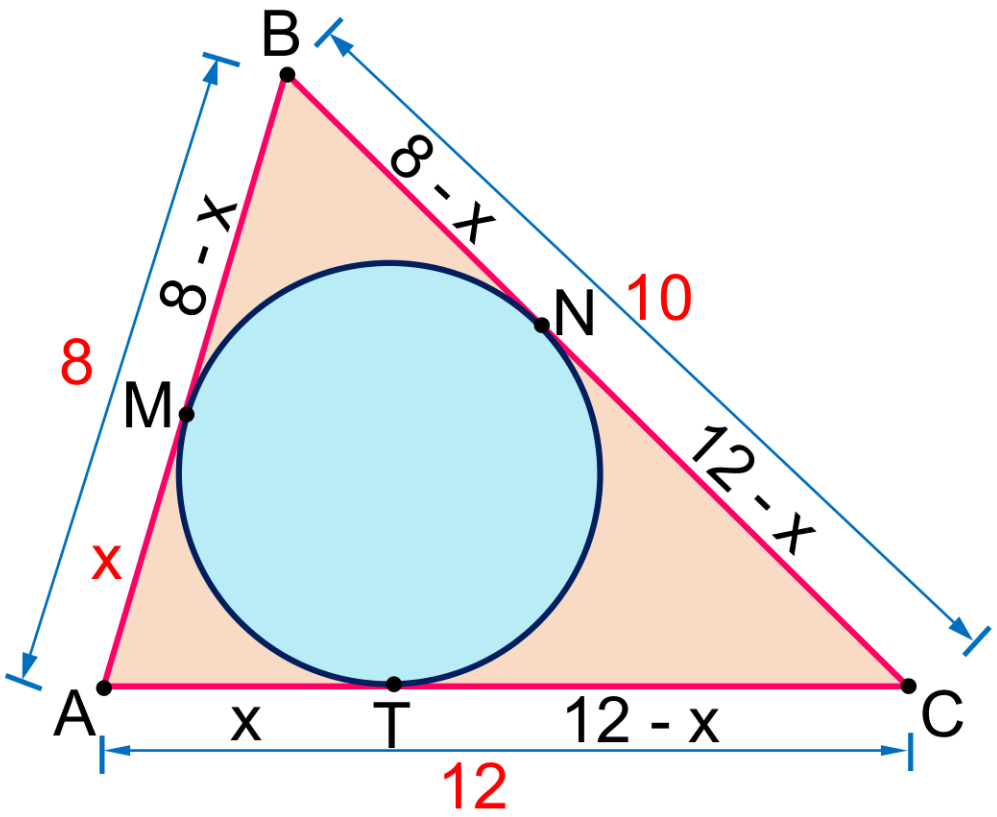
- De (1) y (2):

  x = 2 m

APLICACIÓN

En un triángulo ABC, se inscribe una circunferencia que es tangente a $\overline{AB}$ en el punto M. Si AB = 8 cm; BC = 10 cm y AC = 12 cm, calcule AM.

Resolución:

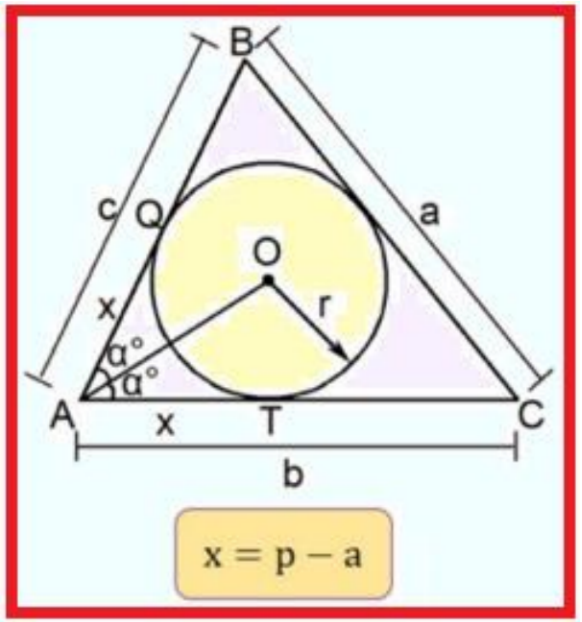


- Nos piden: AM = x
- Teorema: AM = AT = x
- Se observa: MB = 8 – x
  TC = 12 – x
- Teorema: BM = BN = 8 – x
  CT = CN = 12 – x

$\Rightarrow BC = 12 - x + 8 - x = 10$

$20 - 2x = 10$

$\therefore x = 5$



- Otro método:

$\Rightarrow p = \frac{8 + 10 + 12}{2}$

$p = 15$

- Luego:

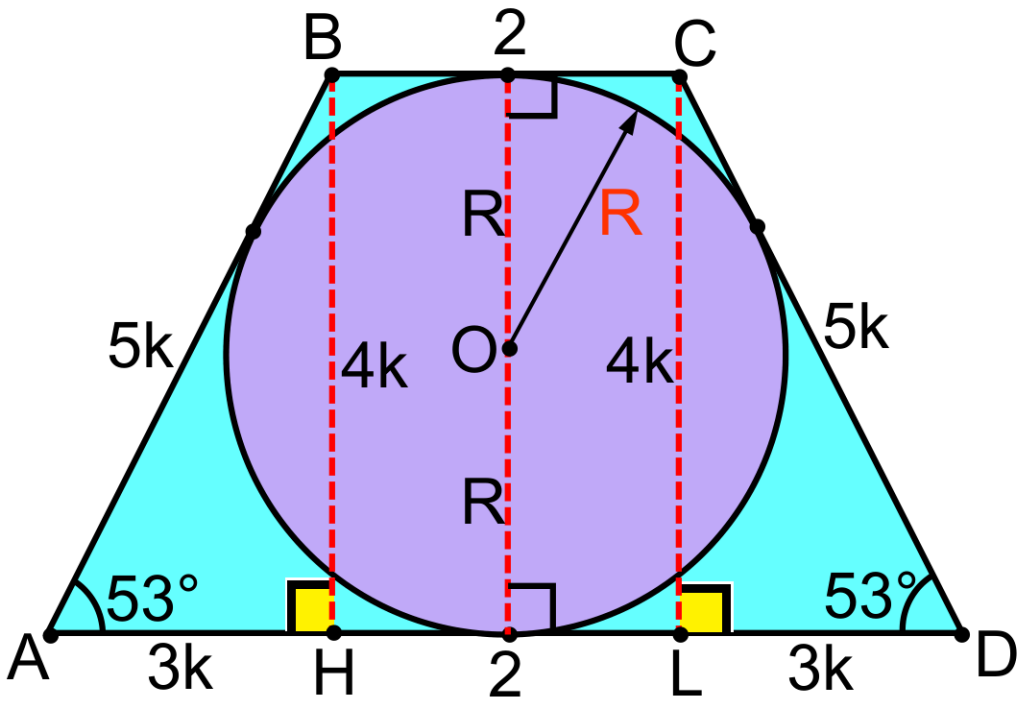
$\Rightarrow x = 15 - 10$

$\therefore x = 5$

EJEMPLO

En un trapecio isósceles los ángulos en la base mayor miden 53° y la base menor mide 2. Calcular el radio de la circunferencia inscrita en el trapecio.

Resolución:



- □HBCL: Rectángulo

  $\Rightarrow BC = HL = 2$

- □ABCD: Teorema de Pithot

  $AB + CD = BC + AD$

  $5k + 5k = 2 + 3k + 2 + 3k$

  $\Rightarrow 4k = 4$

- Se observa: $4k = 2R$

  $2R = 4$

  $\therefore R = 2$

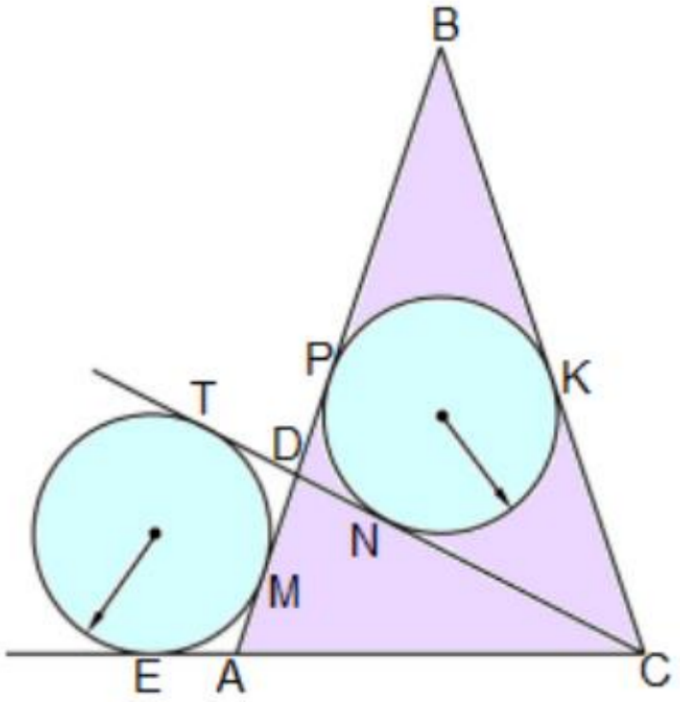
CIRCUNFERENCIA

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

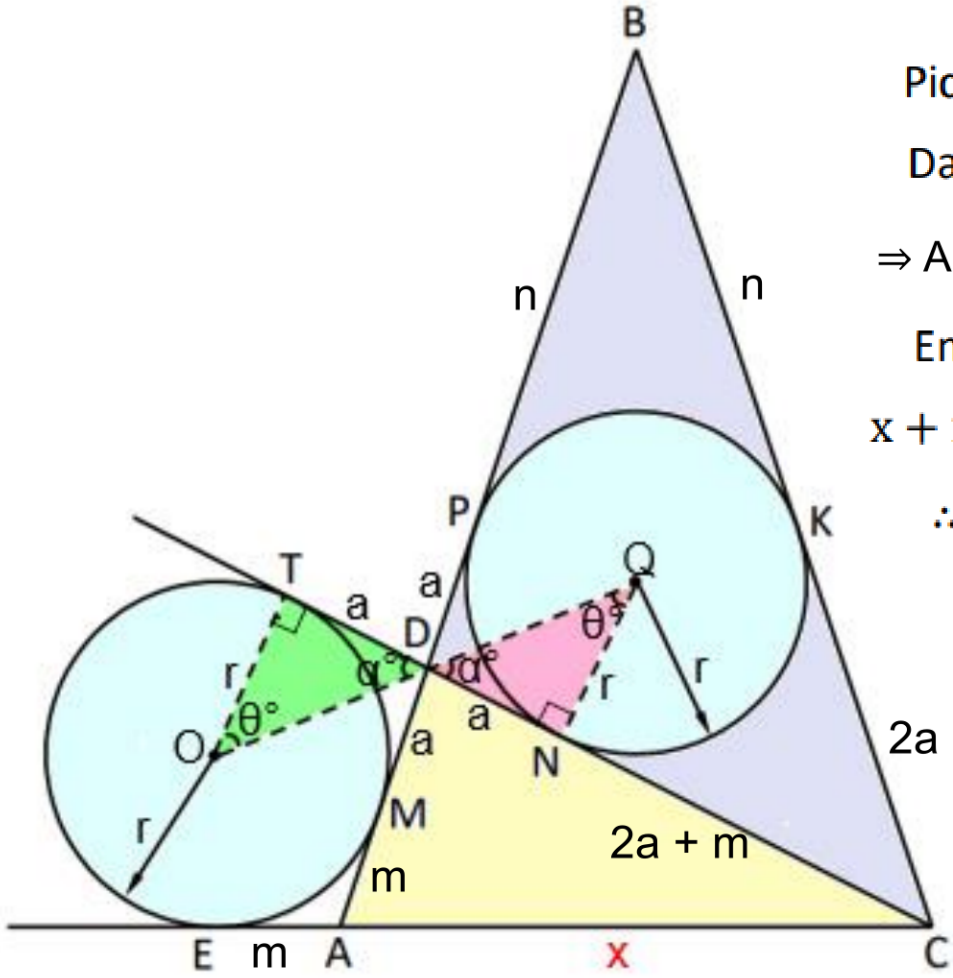
EJERCICIOS

01. En el gráfico: AB=BC. Calcular AC, si TD=a (T, M, E, P, N y K son puntos de tangencia).



A) 2a
B) 3a
C) 4a
D) a/2
E) 8a

Resolución:



Piden: AC=x

Dato: AB = BC

$\Rightarrow AP = KC = 2a + m$

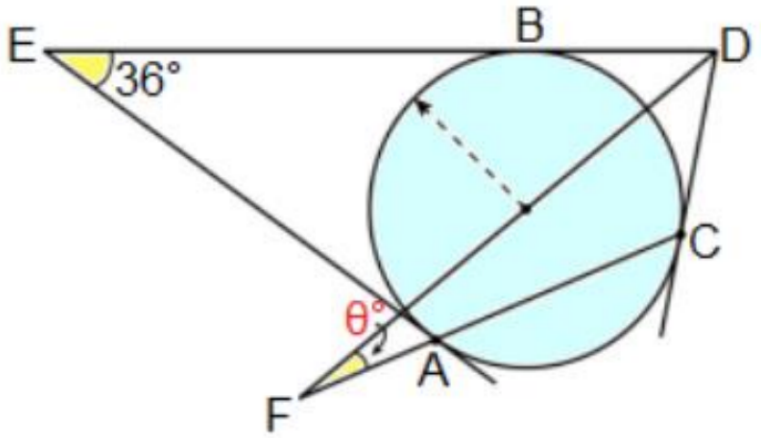
En C:

$$x + m = a + a + (2a + m)$$

$$\therefore x = 4a$$

EJERCICIOS

02. Según el gráfico mostrado A, B y C son puntos de tangencia. Calcule el valor de θ.



A) 12
B) 18
C) 15
D) 9
E) 6

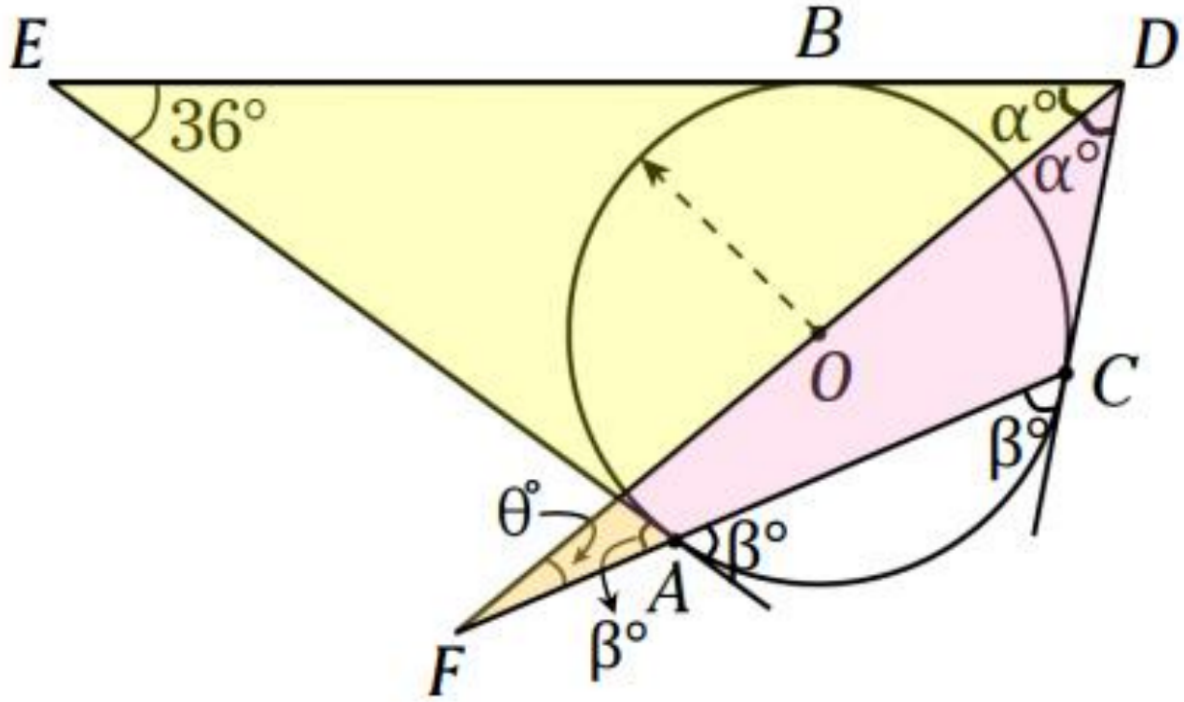
Resolución:

Piden: $m\angle DFC = \theta$

Se observa que O es centro de la circunferencia entonces:

Por Propiedad.

$$m\angle EDO = m\angle ODC = \alpha$$



Luego, por propiedad:

$$m\angle A = \beta = m\angle C$$

En el ΔEDC: $\theta + \alpha = \beta$

Por corbata michi: $\theta + \beta = 36 + \alpha$ (+)

$$2\theta = 36$$

$$\therefore \theta = 18$$

EJERCICIOS

03. Los radios de dos circunferencias exteriores miden 2 cm y 5 cm y la longitud de la tangente común interior es 24 cm. Calcule la distancia (en cm) entre los centros de las circunferencias.

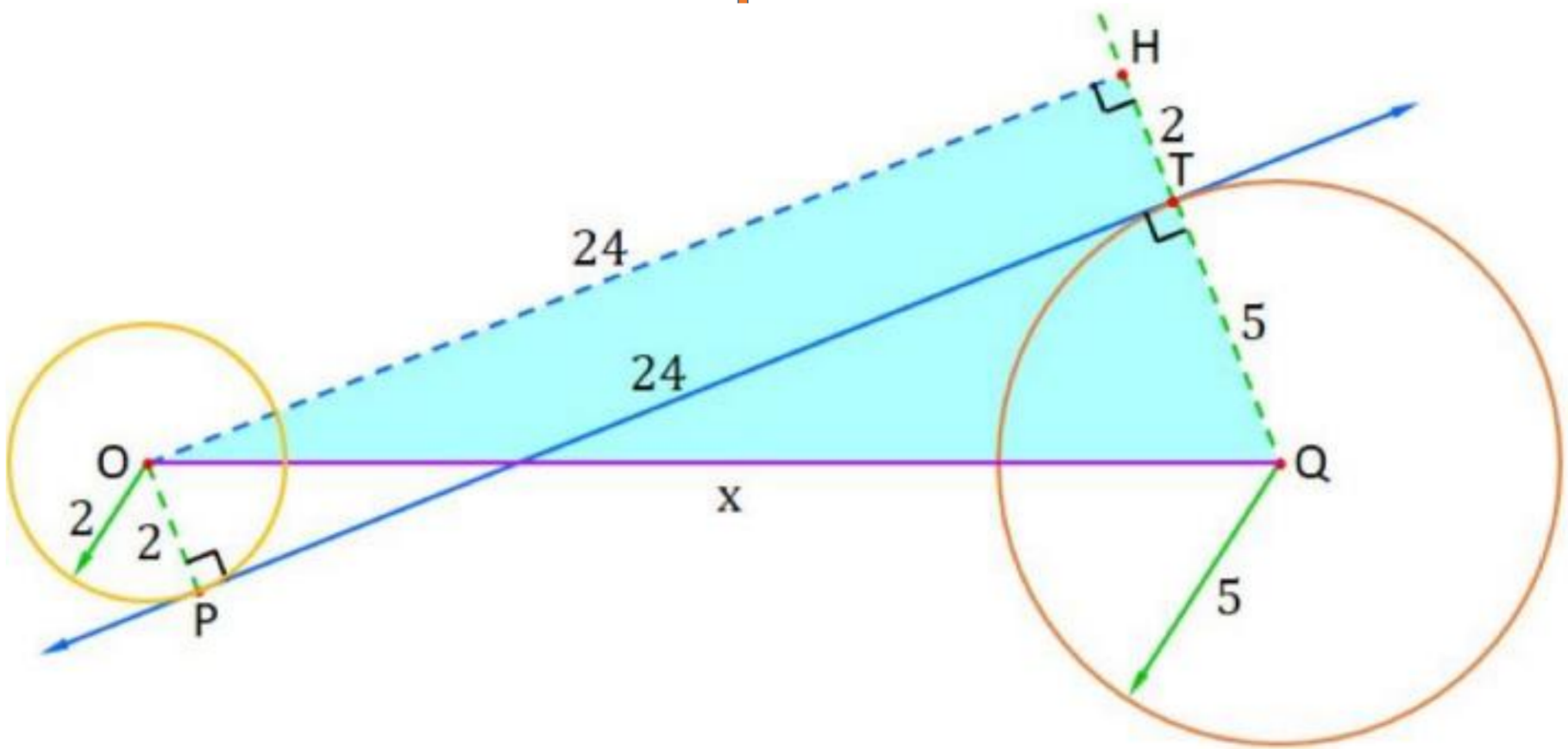
A) 20
B) 22
C) 25
D) 30
E) 35

Resolución:

Se pide: Distancia entre los centros: $OQ = x$

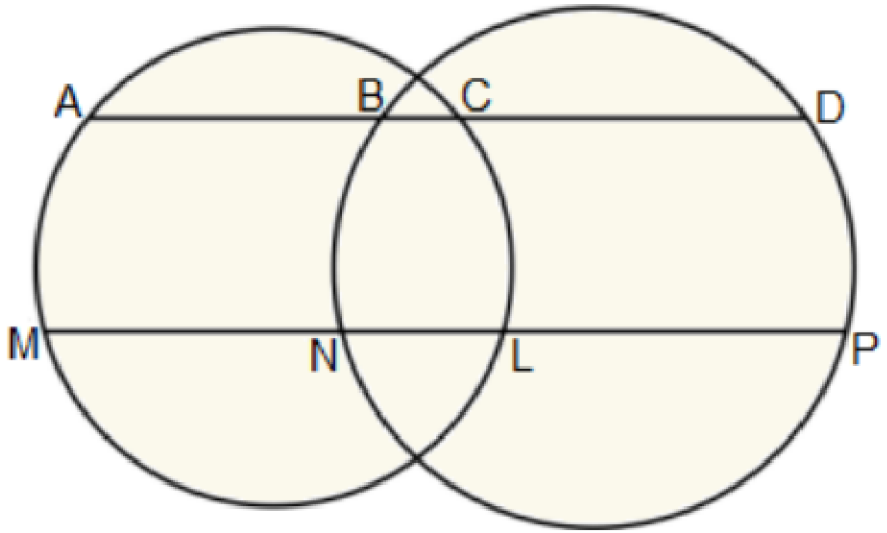
En ΔOHQ: $x^2 = 24^2 + 7^2$

$\therefore x = 25$



EJERCICIOS

04. En la figura mostrada: $\overline{AD} \parallel \overline{MP}$. Si AB=3 cm, CD=4 cm y LP=5 cm, entonces la longitud (en cm) de $\overline{MN}$ es:

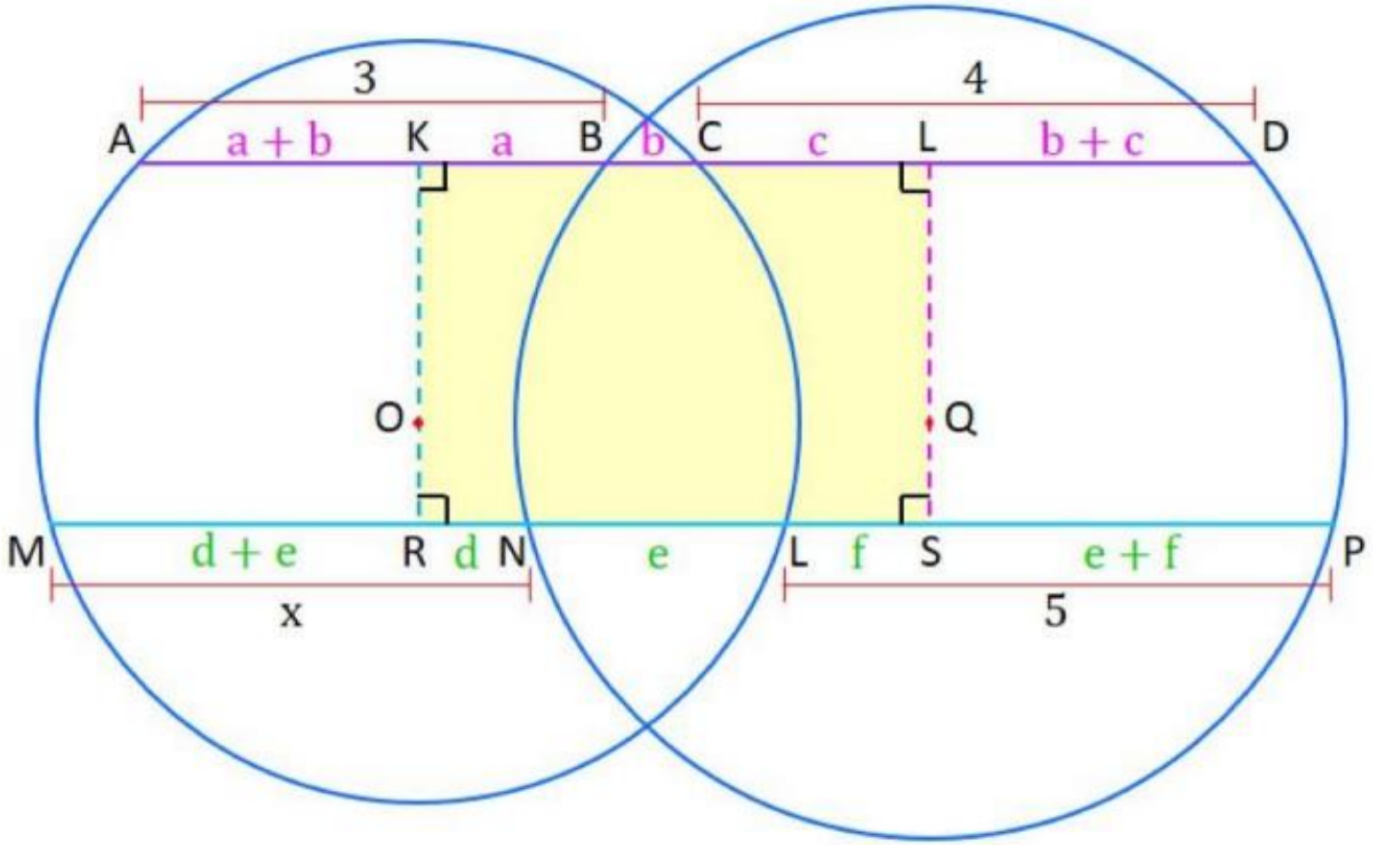


A) 0,5
B) 1
C) 2
D) 2,5
E) 3

Resolución:

Dato: $\overline{AD} \parallel \overline{MP}$

Se pide: $MN = x$



Se observa:

$$\left.\begin{matrix} 2a + b = 3 \\ b + 2c = 4 \end{matrix}\right\} \quad 2a + 2b + 2c = 7$$

$$\left.\begin{matrix} 2d + e = x \\ e + 2f = 5 \end{matrix}\right\} \quad 2d + 2e + 2f = x + 5$$

En el rectángulo RKLS:

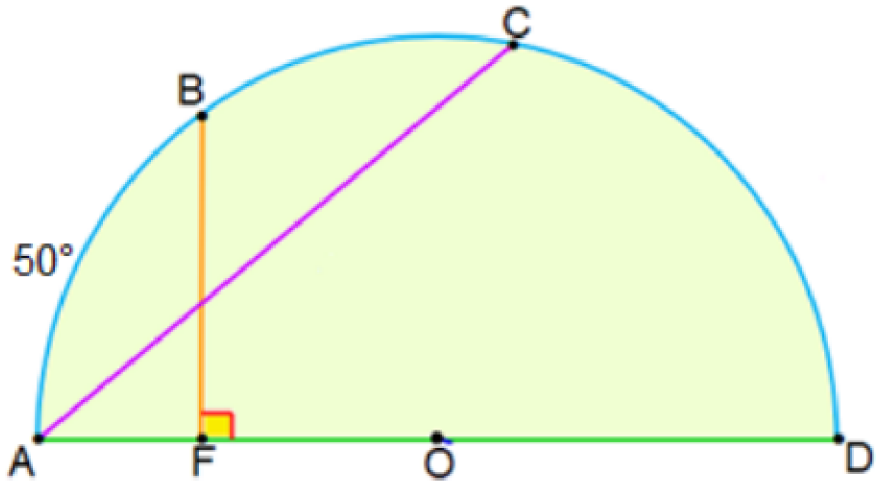
$$a + b + c = d + e + f$$

$$\rightarrow \frac{7}{2} = \frac{x + 5}{2}$$

$$\therefore x = 2$$

EJERCICIOS

05. En el gráfico mostrado, O es centro y AC=2(BF). Calcule la $m\widehat{CD}$.



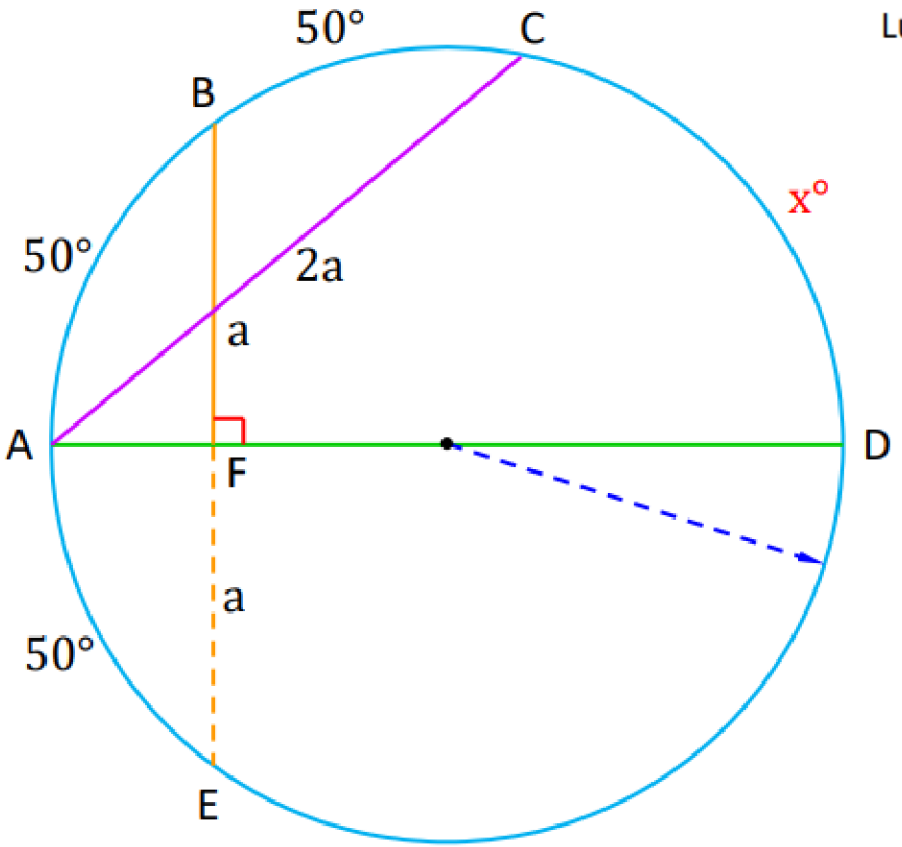
A) 90
B) 70
C) 100
D) 110
E) 80

Resolución: Piden: $m\widehat{CD} = x$

Dato:

$$AC = 2(BF) = 2a$$

Se prolonga $\overline{BF}$ tal que interseca a la circunferencia en E.



Luego, por teorema:

$$BF = FB = a$$

$$\rightarrow m\widehat{AB} = m\widehat{AE} = 50$$

Luego, por teorema:

$$BF = FB = a$$

$$\rightarrow m\widehat{AB} = m\widehat{AE} = 50$$

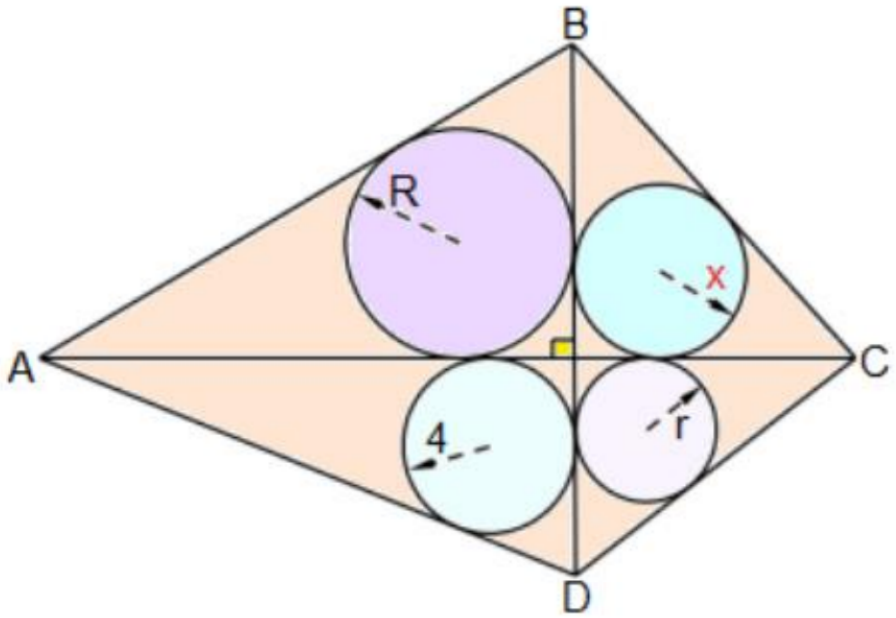
Finalmente:

$$50 + 50 + x = 180:$$

$$\therefore x = 80$$

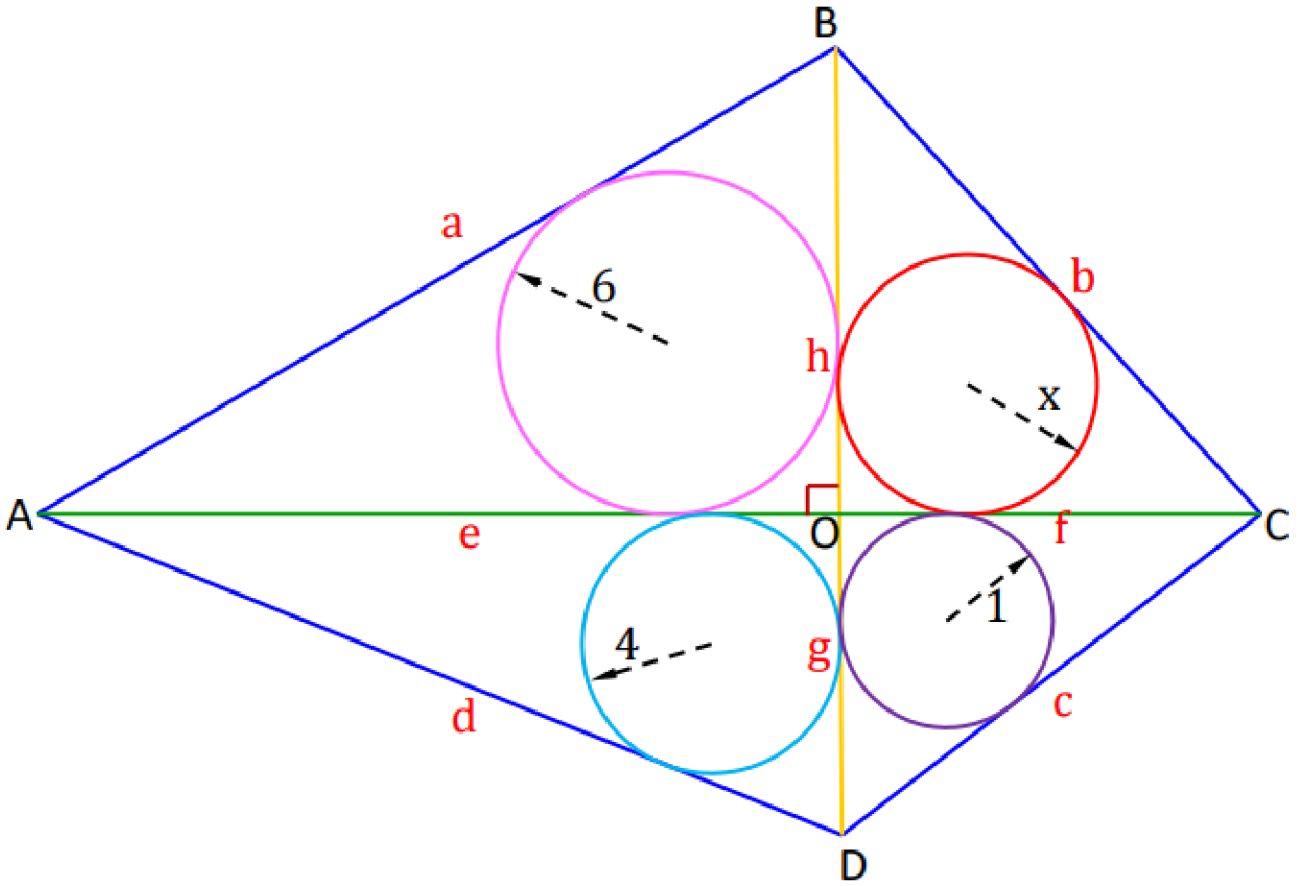
EJERCICIOS

06. En el gráfico, las circunferencias están inscritas en los triángulos. Si el cuadrilátero es circunscriptible y r+R=7. Calcule el valor de x (en u).



A) 1,5
B) 3
C) $\sqrt{3}$
D) 2
E) $\sqrt{2}$

Resolución:



$$a + c + 14 = d + b + 8 + 2x$$

Del dato ABCD es circunscriptible:

$$a + c = d + b$$

Finalmente:

$$14 = 8 + 2x$$

$$\therefore x = 3$$

EJERCICIOS

07. Se tiene un polígono convexo de 8 lados circunscrito a una circunferencia. Si las longitudes de sus lados están en progresión geométrica de razón r, determine r^2+3r.

A) 1
B) 4
C) 10
D) 18
E) 28

Resolución:

Se pide: $x = r^2 + 3r$

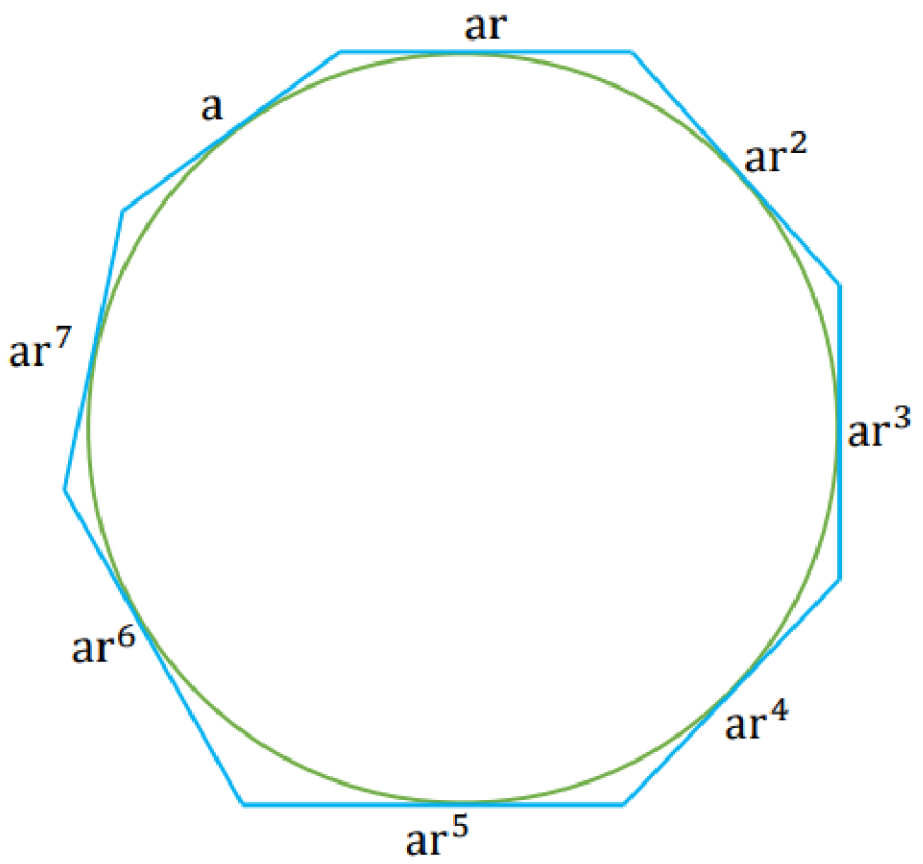
Por el teorema generalizado de Pithot:

$$a + ar^2 + ar^4 + ar^6 = ar + ar^3 + ar^5 + ar^7$$

Factorizando:

$$a(1 + r^2 + r^4 + r^6) = ar(1 + r^2 + r^4 + r^6)$$

Luego: $r = 1$



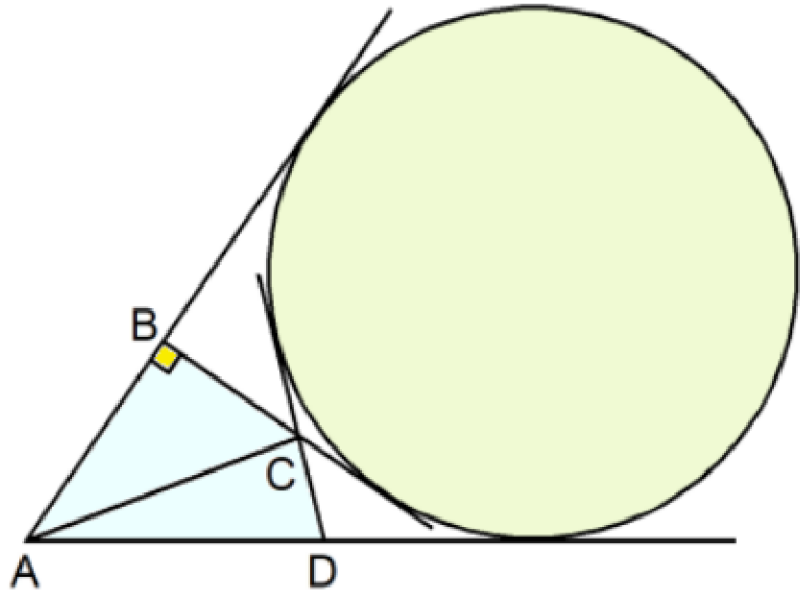
Reemplazando en lo que se pide:

$$x = (1)^2+3(1)$$

$$\therefore x = 4$$

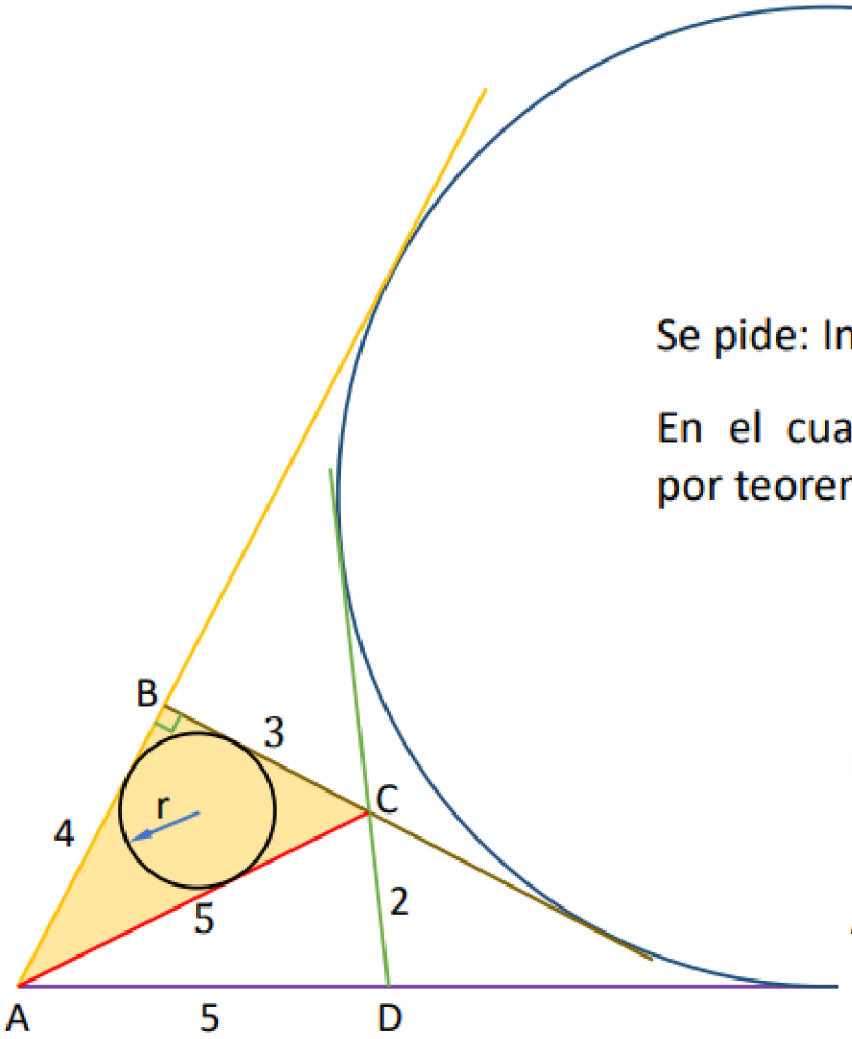
EJERCICIOS

08. En el gráfico, el cuadrilátero exinscrito ABCD, cumple que: AB=4, AD=5 y CD=2. Calcular el inradio del triángulo ABC.



A) 0,5
B) 2
C) 1
D) 1,5
E) 2,5

Resolución:



Se pide: Inradio del triángulo ABC = r

En el cuadrilátero exinscrito ABCD, por teorema de Steiner:

$$4 - 2 = 5 - BC$$

$$\rightarrow BC = 3$$

En el triángulo ABC:

$$AC = 5$$

Además, por Poncelet:

$$4 + 3 = 5 + 2r$$

$$\therefore r = 1$$

EJERCICIOS

09. Un triángulo ABC recto en B está inscrito en una circunferencia. Calcular la longitud del radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en función de las longitudes de los radios r_1 y r_2 de las circunferencias máximas inscritas a los segmentos circulares determinados por los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, y de la longitud r del radio de la circunferencia inscrita al triángulo ABC.

A) $r+r_1+r_2$
B) $3r+r_1+r_2$
C) $2(r+r_1+r_2)$
D) $r+3(r_1+r_2)$
E) $r+2(r_1+r_2)$

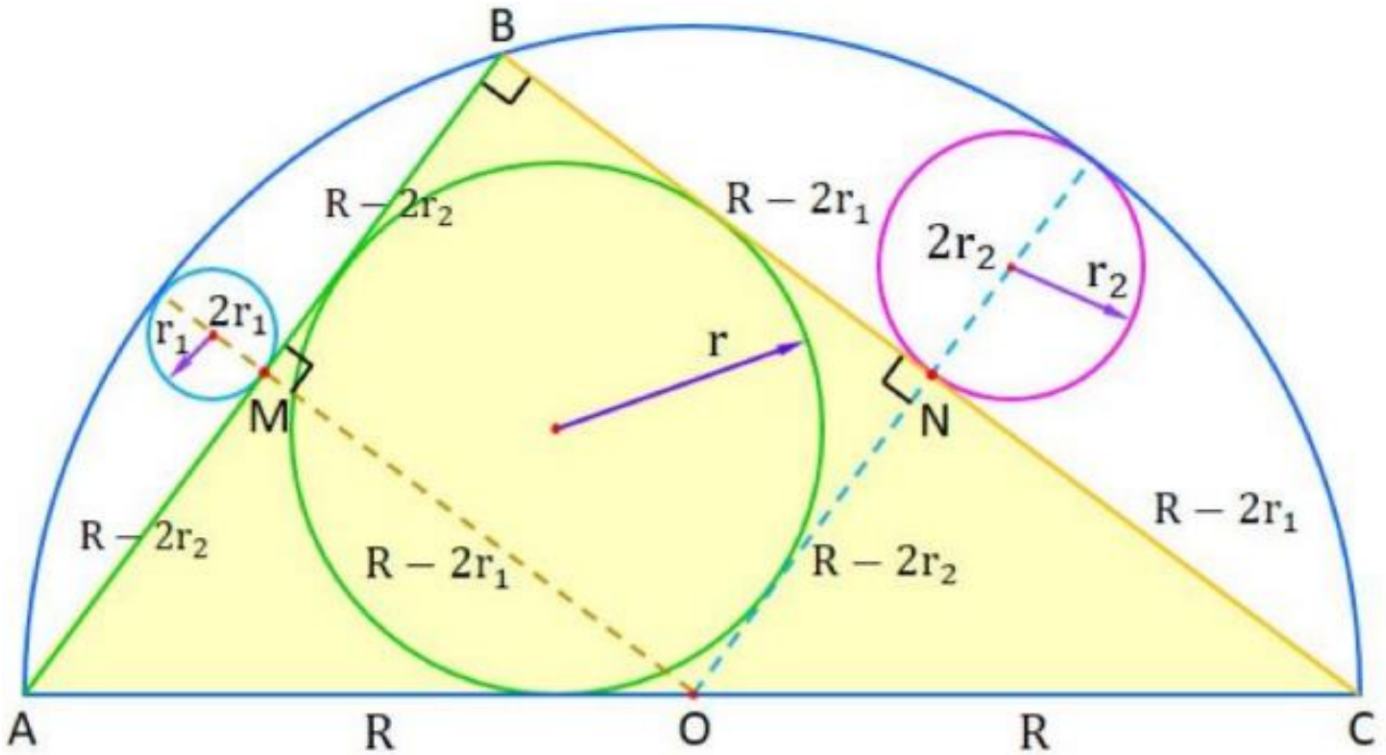
Resolución:

Se pide: $R=?$

En el rectángulo OMBN:

$$OM = BN = R - 2r_1 = NC$$

$$ON = MB = R - 2r_2 = AM$$



Por último, aplicamos el teorema de Poncelet en el triángulo ABC:

$$AB + BC = AC + 2r$$

$$2(R - 2r_2) + 2(R - 2r_1) = (2R) + 2r$$

$$R - 2r_2 + R - 2r_1 = R + r$$

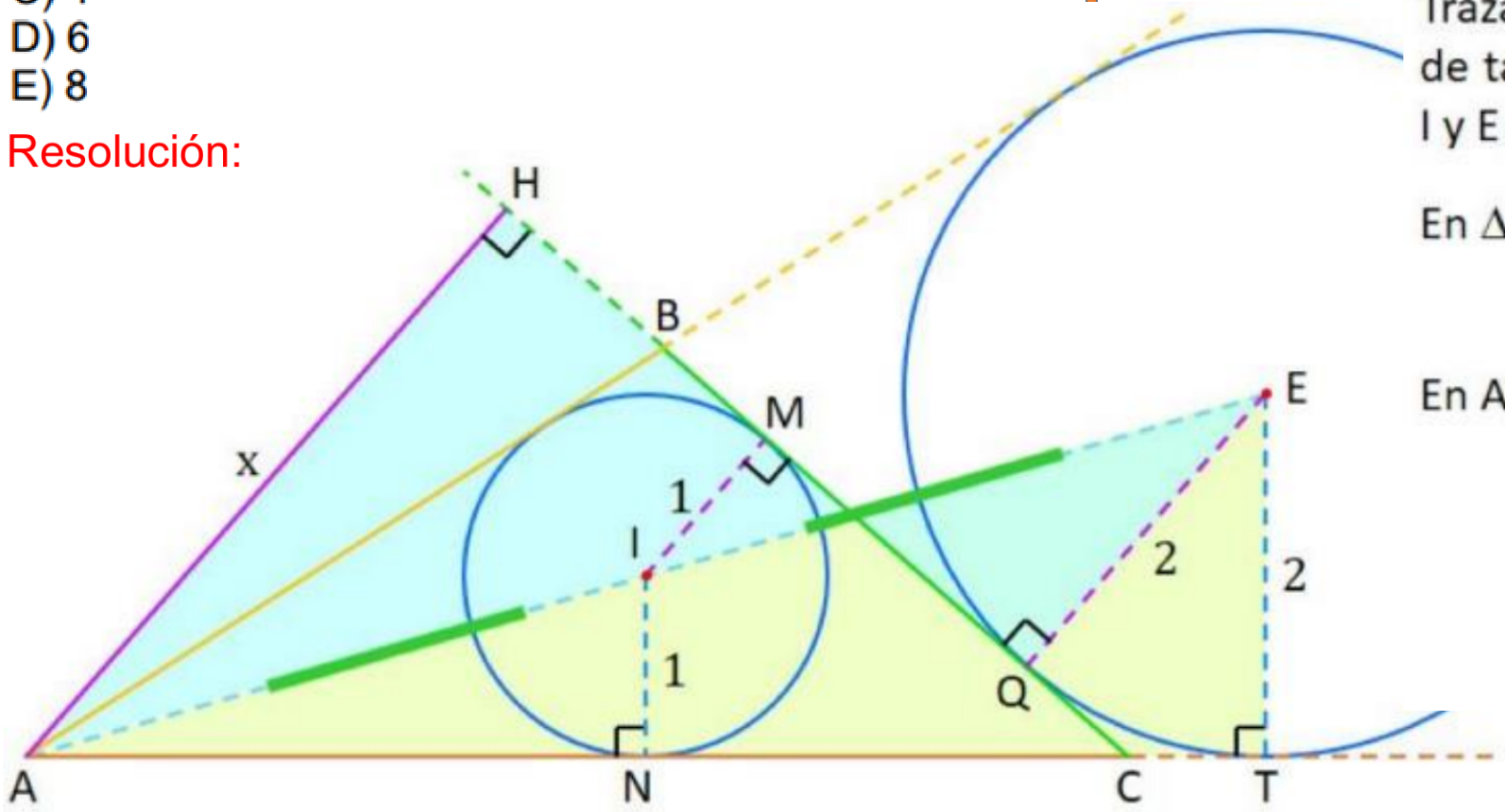
$$\therefore R = 2r_1 + 2r_2 + r$$

EJERCICIOS

10. En un triángulo ABC el inradio y el exradio relativo a $\overline{BC}$ miden 1 y 2 respectivamente. Calcular la medida de la altura $\overline{AH}$.

A) 2
B) 3
C) 4
D) 6
E) 8

Resolución:



Se pide: $AH = x$

Datos: $\text{Inradio} = 1$

$\text{Exradio relativo a } \overline{BC} = 2$

Trazamos los radios hacia los puntos de tangencia, además observe que A, I y E son colineales.

En ΔAET: $\overline{IN}$ es base media

$\rightarrow AI = IE$

En AHQEA, por propiedad:

$$1 = \frac{x-2}{2}$$

$\therefore x = 4$

PITAGORAS ACADEMIA

CLAVES

PARA LA CLASE

01	02	03	04	05
C	B	C	C	E

06	07	08	09	10
B	B	C	E	C

TAREA

01	02	03	04	05
D	E	A	E	B

06	07	08	09	10
D	E	D	C	B

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS